

# Commande par retour d'état

Introduction aux systèmes asservis

Rappel des transformées de Laplace

Représentation externe et stabilité

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état

Régulateur / Observateur et RST

Synthèse



# Qui suis je?



gipsa-lab



## Damien Koenig :

- ✓ 52 ans
- ✓ Enseignant à l'Esisar
- ✓ Recherche au Gipsa-lab UMR CNRS
- ✓ Phd : 1998
- ✓ Habilité à diriger les recherches 2007

✓ Site web à votre disposition

✓ <http://koenig-damien.jimdo.com/enseignement>

# Introduction aux systèmes asservis

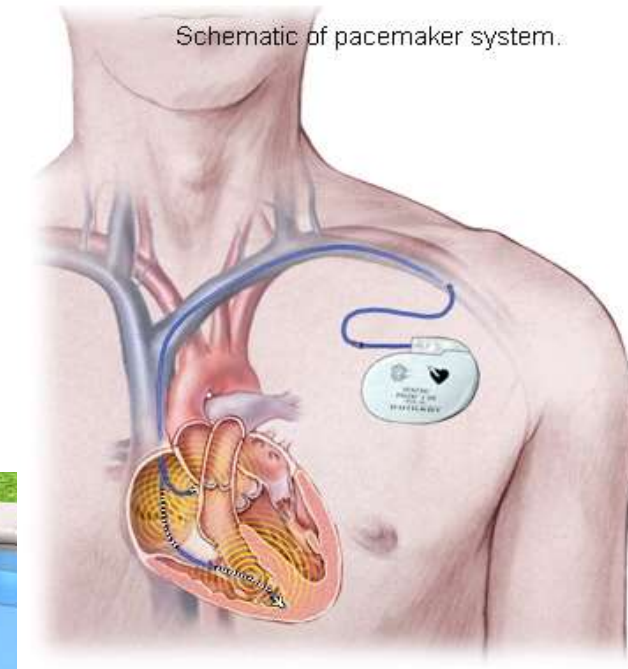
## Systemes de régulation



Clim automatique



Régulateur niveau  
piscine



Pacemaker

## Consigne constante

# Types de systèmes asservis:

## Systèmes suiveurs



Missile à tête chercheuse



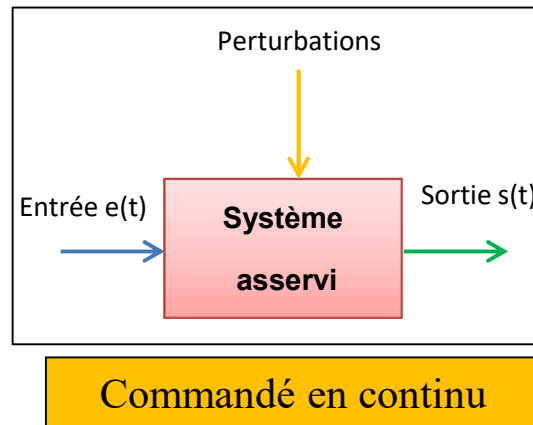
Suiveur solaire

## Consigne variable

# But de l'Automatique



Pilote automatique



La sortie doit correspondre au plus près à l'entrée  
(boucle retour avec capteur)

→ { stabilité  
précision  
rapidité  
amortissement ...

# Quelques applications



Automobile : ABS/ESP/ASR  
Conduite autonome....



*UAV : unmanned aerial vehicle*



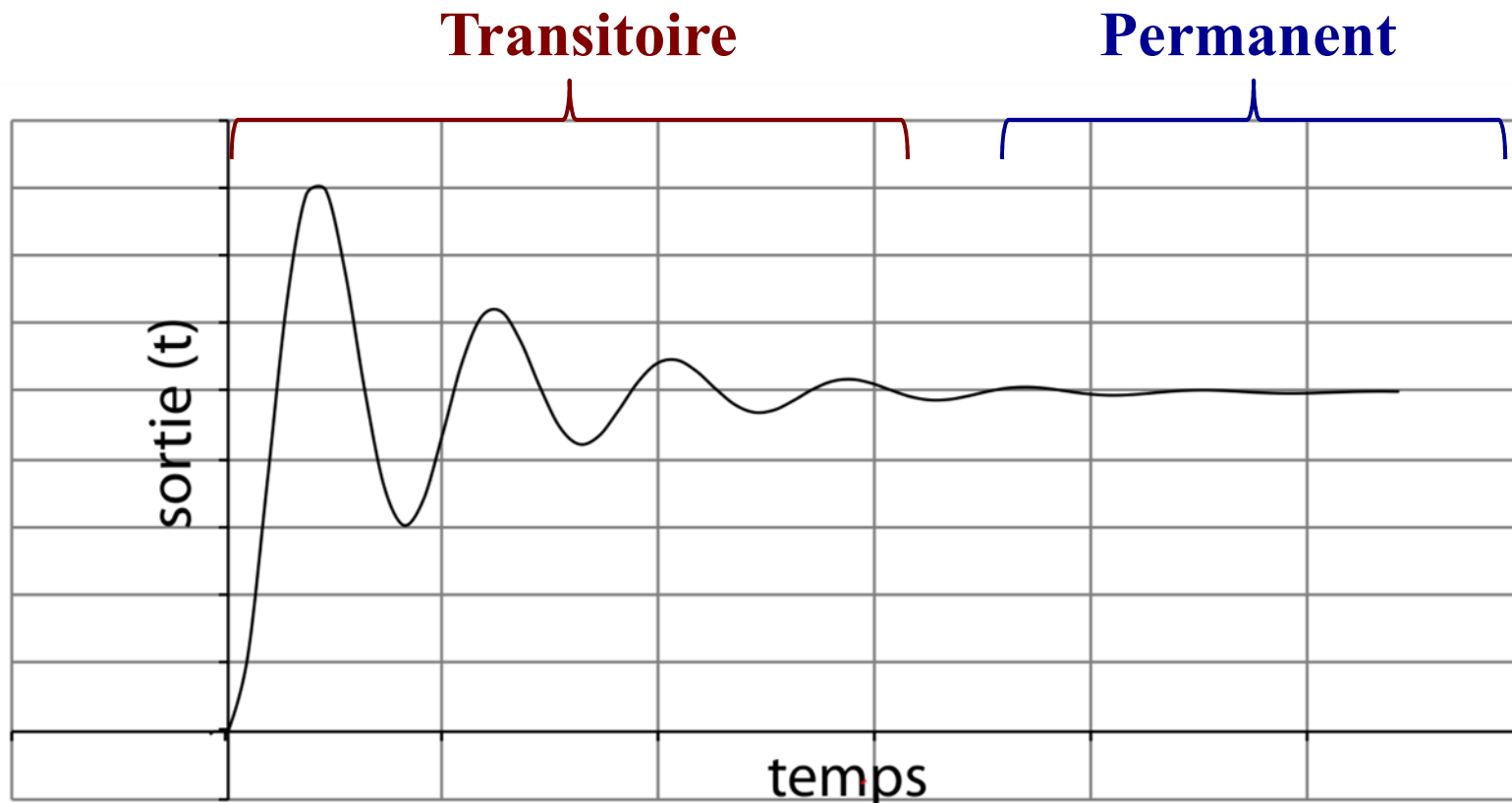
*MP 89 CA "METEOR"*



installation d'épuration de gaz  
de haut-fourneau

# Critères de performance

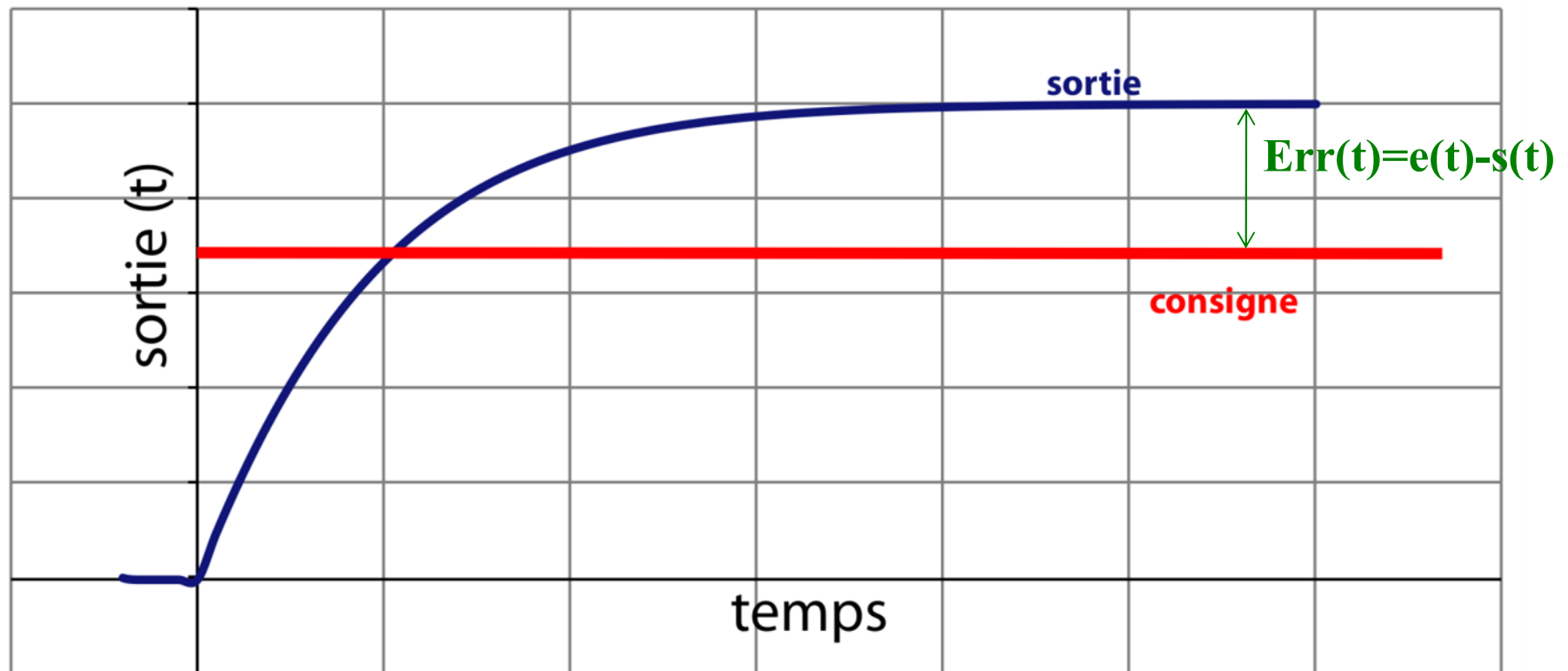
Distinction des régimes



# Critères de performance

## Régime permanent

**Précision** : écart entre les valeurs souhaitée (consigne) et obtenue (sortie)

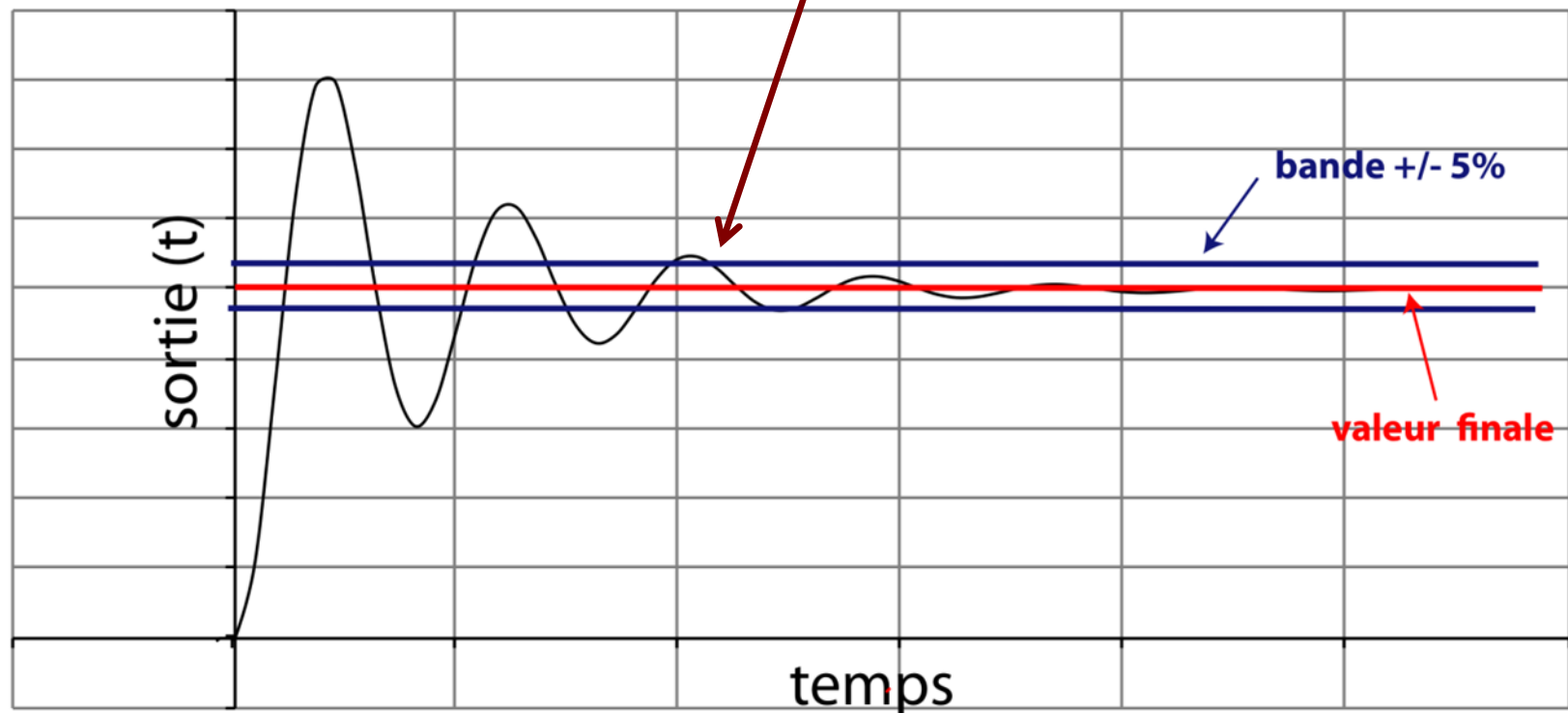




# Critères de performance

## Régime transitoire

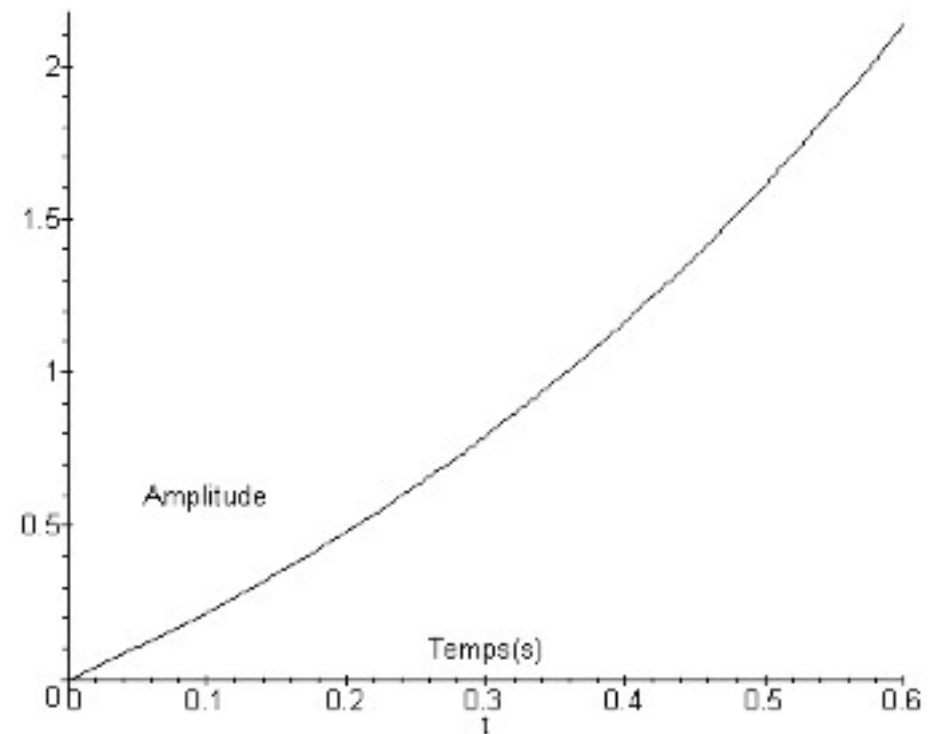
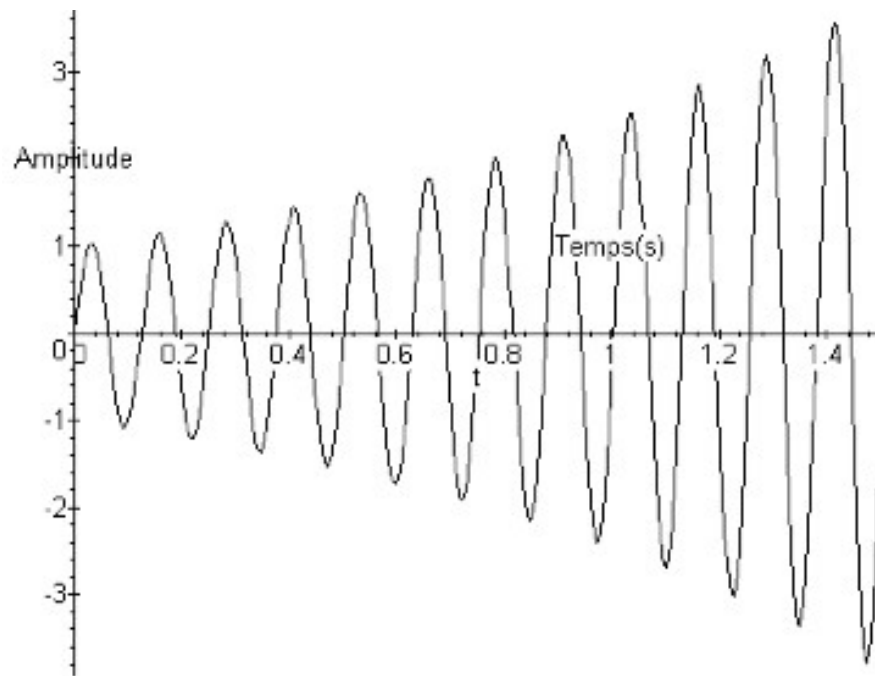
**Rapidité** : caractérisée par le temps mis pour arriver en régime permanent



# Critères de performance

## Régime permanent

**Stabilité** : stable si la sortie est **bornée**, pour une entrée bornée

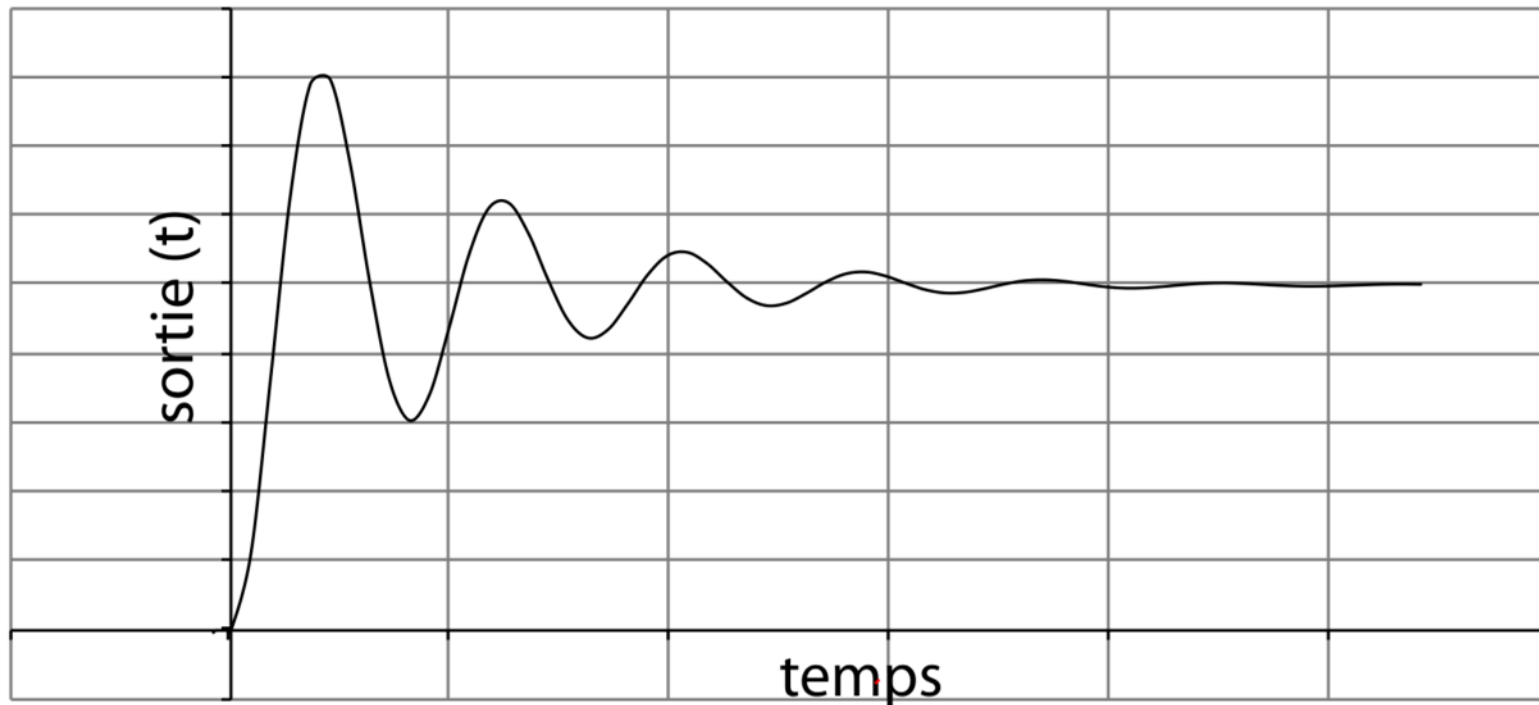


Instable

# Critères de performance

## Régime permanent

**Stabilité** : stable si la sortie est **bornée**, pour une entrée bornée

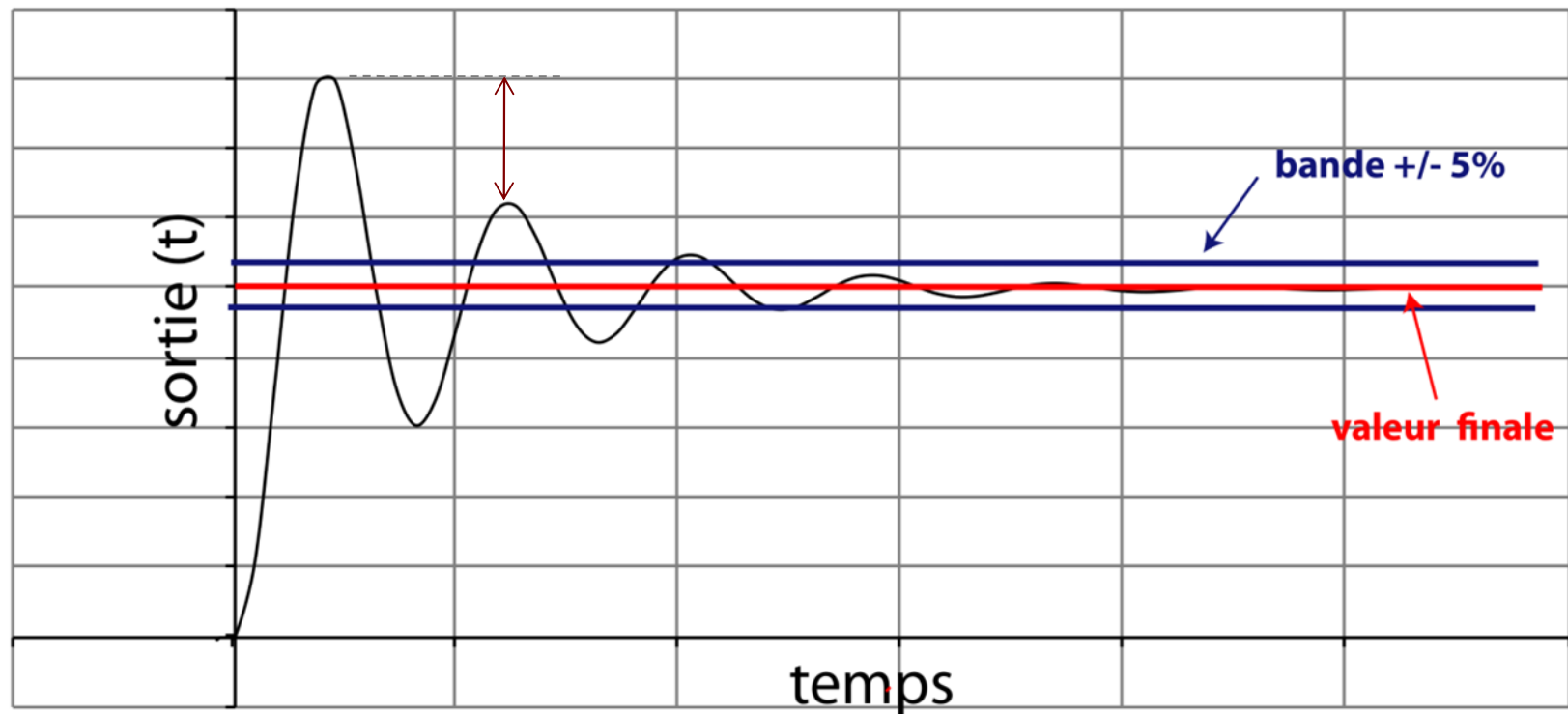


Stable

# Critères de performance

## Régime transitoire

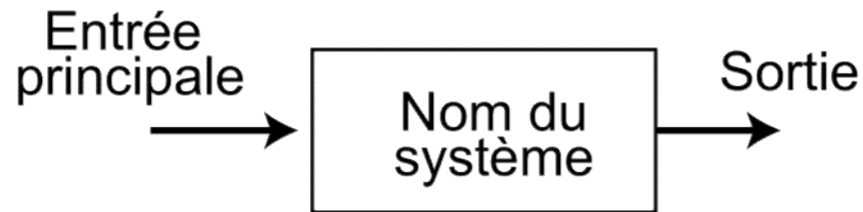
**Amortissement** : caractérisé par la diminution de l'amplitude des oscillations



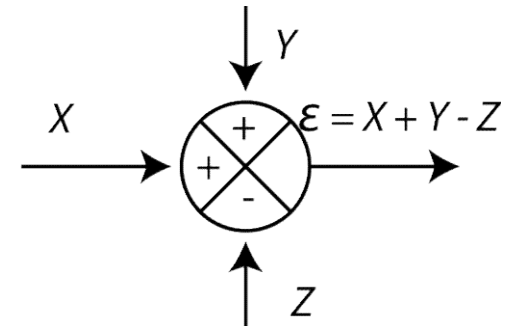
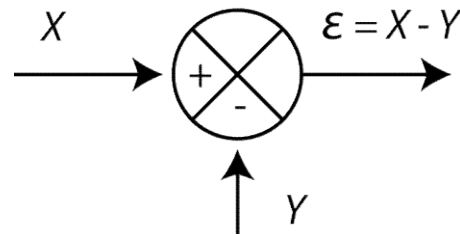
# Schématisation par schéma-blocs

Trois éléments de base:

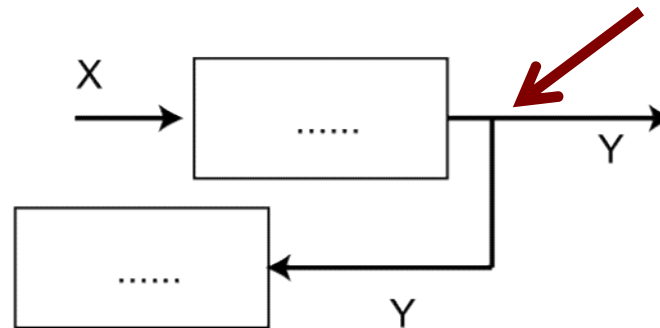
**Bloc**



**Comparateur**  
(sommateur)



**Point de  
prélèvement**




# Modélisation par équations différentielles

## Modèle général

Les SLCI étudiés seront représentables la plupart du temps par des équations différentielles à coefficients constants liant la grandeur d'entrée  $e(t)$  à la grandeur de sortie  $s(t)$ .


*Ordre du système*


$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)$$

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du premier ordre

*constante de temps du système (s)*

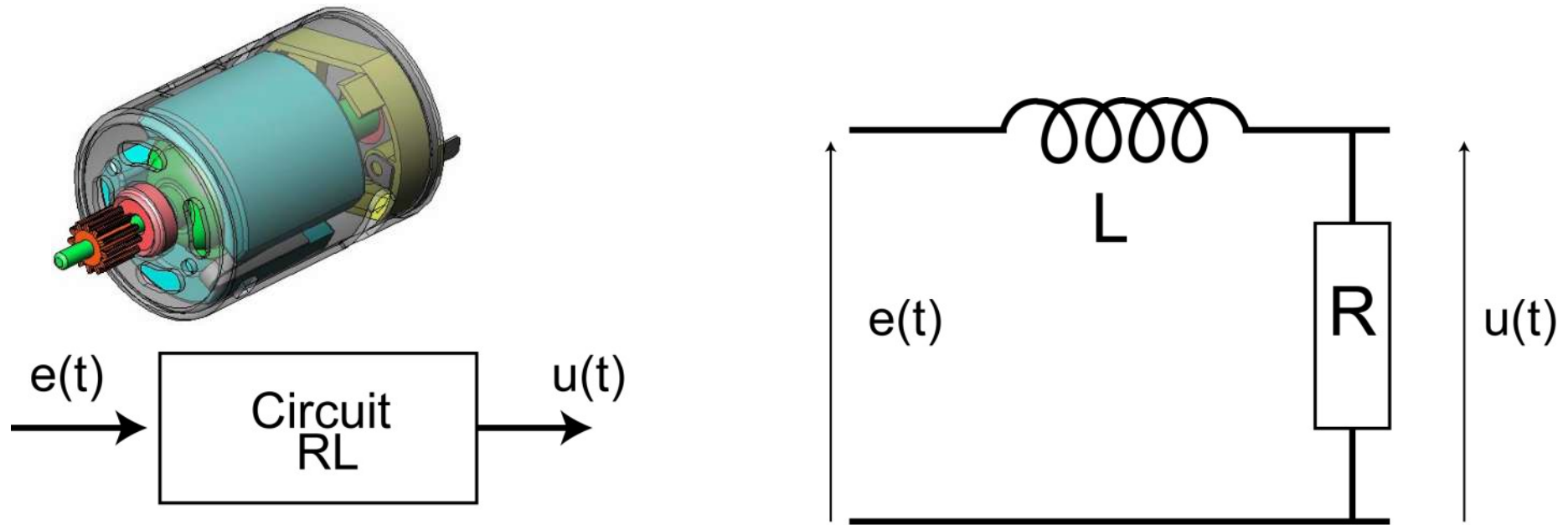

$$\tau \frac{d s(t)}{d t} + s(t) = K e(t)$$



*Gain du système [s]/[e]*

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du premier ordre



$$e(t) = L \frac{d i(t)}{dt} + R i(t)$$

$$u(t) = R i(t)$$

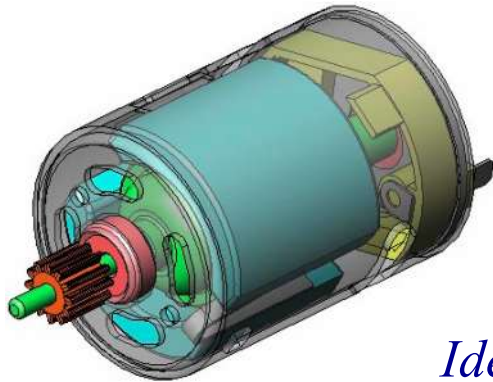
$$\Rightarrow \boxed{\frac{L}{R} \frac{d u(t)}{dt} + u(t) = e(t)}$$

*Exemple : circuit RL (moteur électrique)*



# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du premier ordre



$$\frac{L}{R} \frac{d u(t)}{d t} + u(t) = e(t)$$

*Identification avec*  $\tau \frac{d s(t)}{d t} + s(t) = K e(t)$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R} \quad K = 1$$

*Exemple : circuit RL (moteur électrique)*

# Modélisation par équations différentielles

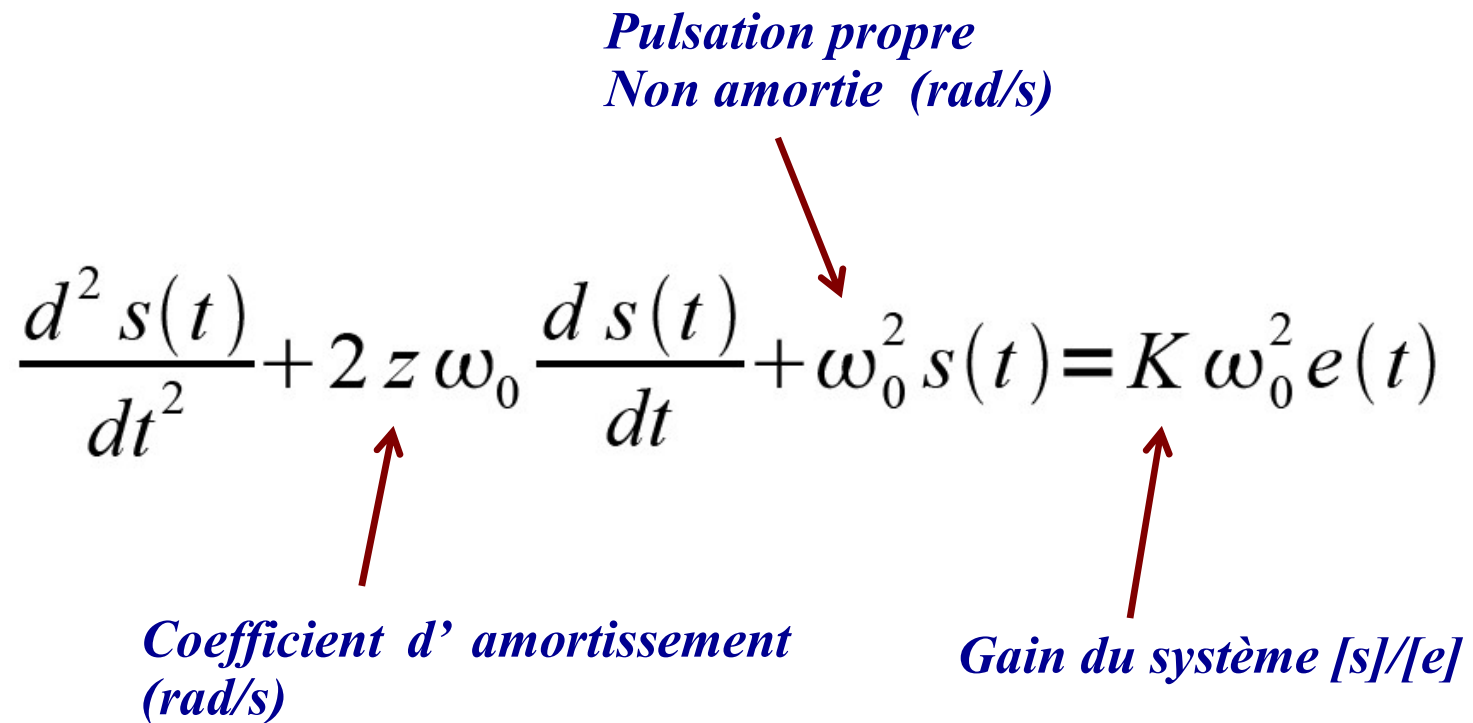
## Systemes du deuxième ordre

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

*Pulsation propre  
Non amortie (rad/s)*

*Coefficient d'amortissement  
(rad/s)*

*Gain du système [s]/[e]*



# Modélisation par équations différentielles

Systemes du deuxième ordre

*Amortisseur*

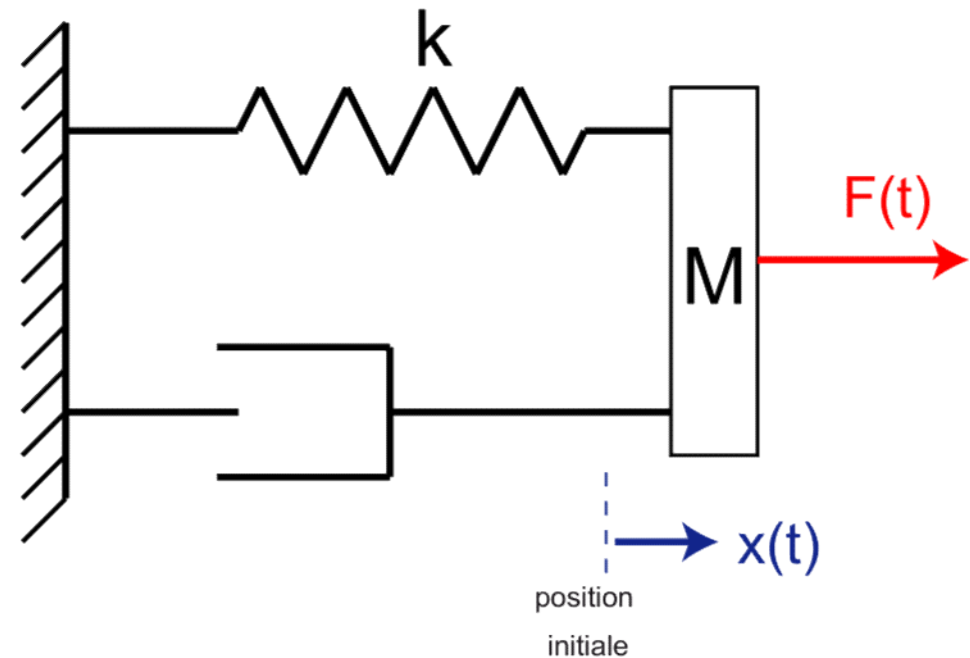
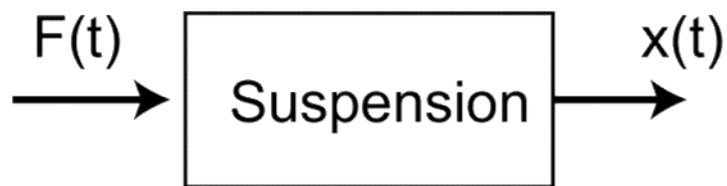
*Ressort*



*Exemple : Suspension*

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du deuxième ordre



*Exemple : Suspension*

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du deuxième ordre



Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la masse donne l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{M} x(t) = \frac{1}{M} F(t)$$

*Identification avec*

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

$$K = \frac{1}{k} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{Mk}}$$

*Exemple : Suspension*

# Commande par retour d'état

Rappel des transformées de Laplace

Représentation externe et stabilité

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état

Régulateur / Observateur et RST

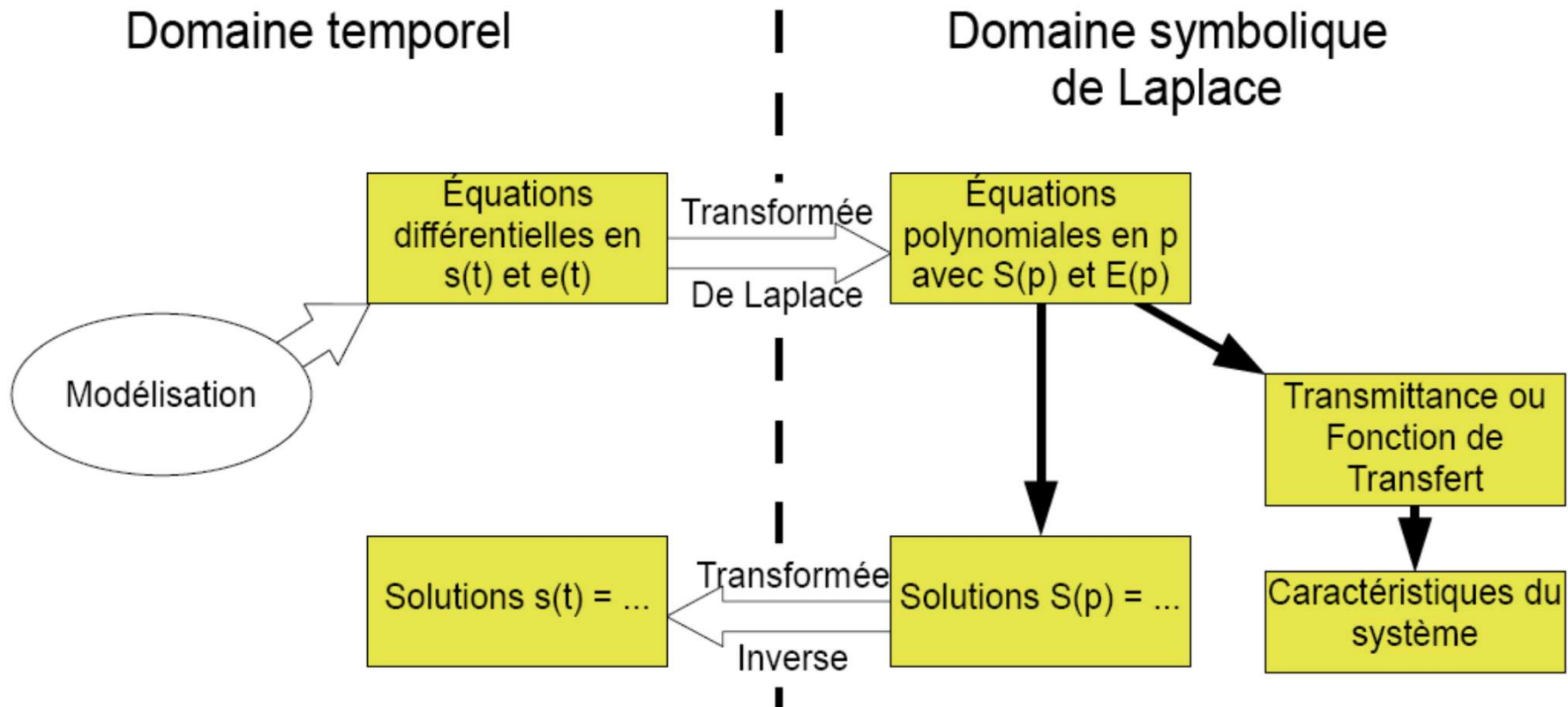
Synthèse

# Transformées de Laplace et FT

## Objectif :

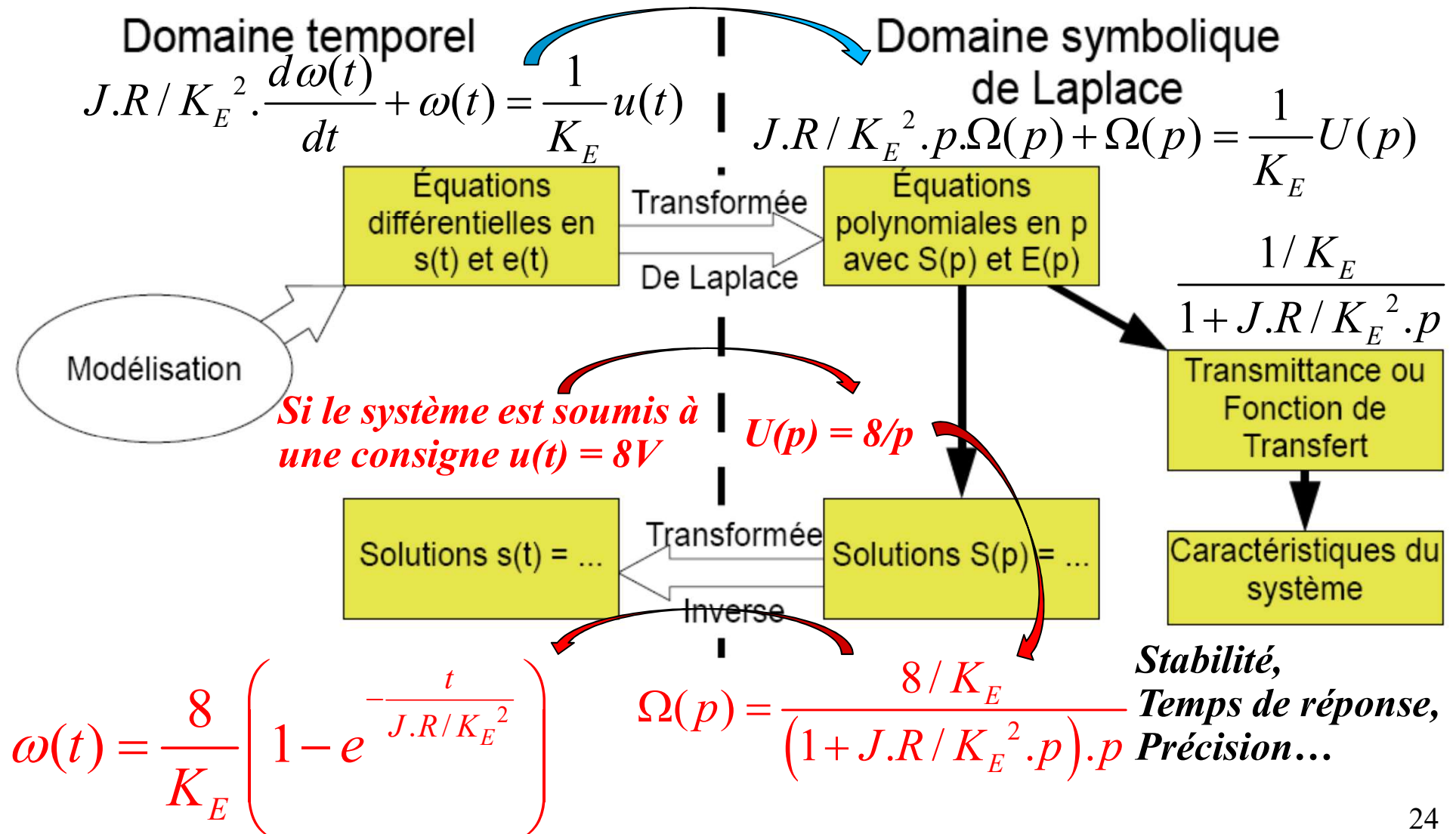
Supprimer les équations différentielles dans les calculs (simplifier les équations de modélisation).

## Démarche:



# Transformées de Laplace et FT

## Démarche (exemple d'un moteur CC) :





# Transformées de Laplace et FT

## Transformée de Laplace :

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) = L[f(t)](p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$$

avec **p** une **variable complexe**, dont l'unité est en  $s^{-1}$  :  $p = a + j.b$   
*avec  $j^2 = -1$*

$F(p) = L(f(t))$  : transformée de Laplace de la fonction  $f$ .

$f(t) = L^{-1}(F(p))$  : transformée inverse de la fonction  $F$ .

# Transformées de Laplace et FT

## Propriétés importantes de la transformée de Laplace :

Propriétés	$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
linéarité	$a.f_1(t) + b.f_2(t)$	$a.F_1(p) + b.F_2(p)$
dérivation	$f'(t)$	$p.F(p)$
intégration	$\int_{0^-}^t f(x).dx$	$\frac{F(p)}{p}$
retard	$f(t - \tau).u(t - \tau)$	$e^{-\tau.p}.F(p)$

# Transformées de Laplace et FT

## Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p.F(p))$$

$$\Rightarrow \text{Pente à l'origine : } \lim_{t \rightarrow 0^+} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p^2.F(p))$$

## Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p.F(p))$$

$$\Rightarrow \text{Pente finale : } \lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p^2.F(p))$$

si la limite existe

# Transformées de Laplace et FT

Hypothèse : CI = 0 lors de la recherche FT.

## Fonction de transfert (FT) d'un système :

La FT d'un système est la traduction dans le domaine de Laplace de l'équation différentielle liant l'entrée et la sortie du système.

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$



Transformation dans Laplace

$$a_n \cdot L \left[ \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right] + a_{n-1} \cdot L \left[ \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} \right] + \dots + a_0 \cdot L [s(t)] = b_m \cdot L \left[ \frac{d^m e(t)}{dt^m} \right] + b_{m-1} \cdot L \left[ \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} \right] + \dots + b_0 \cdot L [e(t)]$$

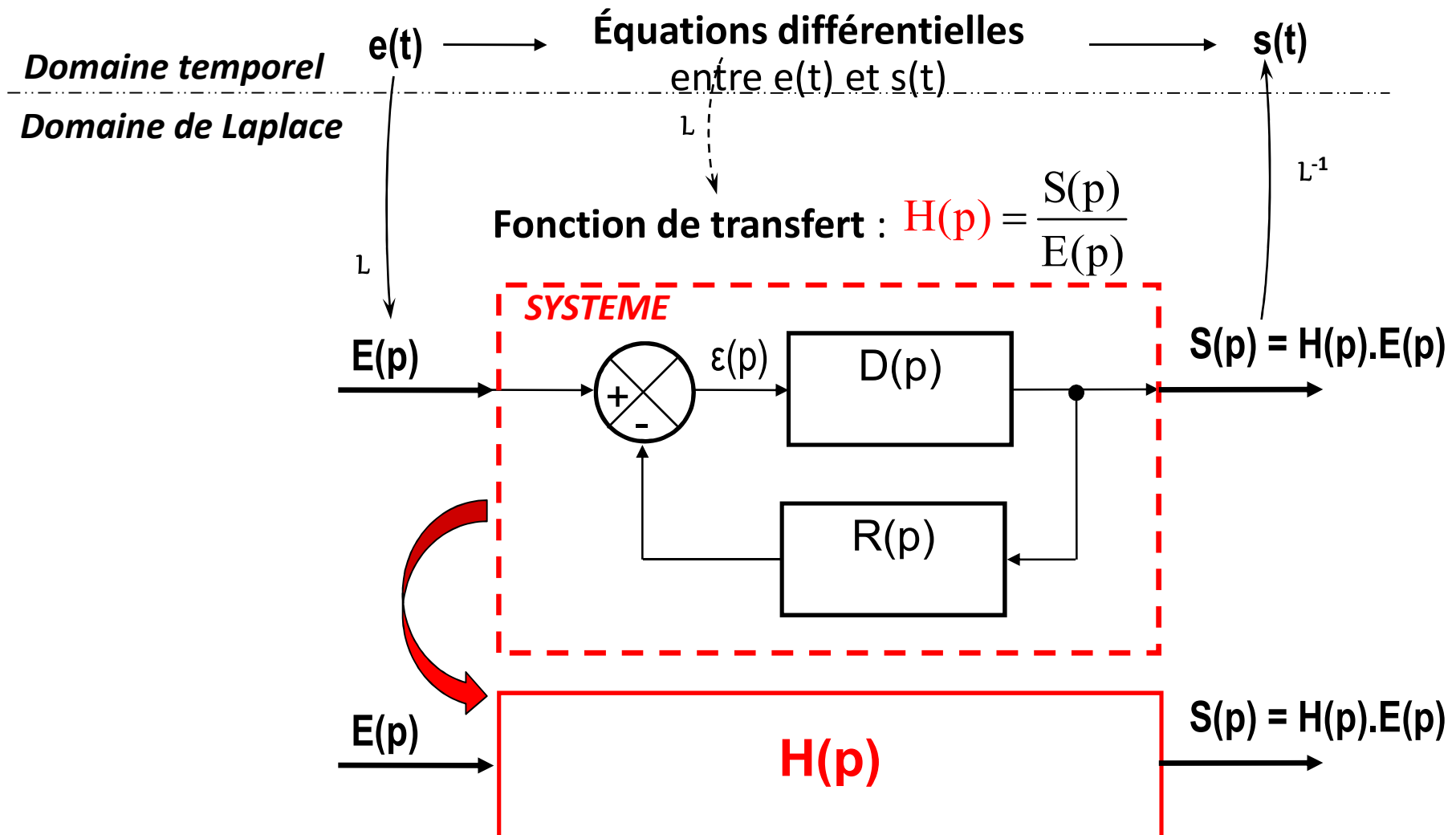
$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot S(p) + \dots + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot E(p) + \dots + b_0 \cdot E(p)$$

$$S(p) \cdot [a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n] = E(p) \cdot [b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]$$

$$S(p) = E(p) \cdot \frac{[b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]}{[a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n]} \xrightarrow{\text{Fonction de transfert}} H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

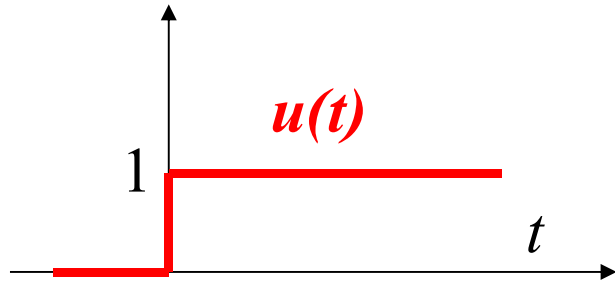
# Transformées de Laplace et FT

## Fonction de transfert (FT) d'un système :



# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

## Échelon unitaire, ou fonction d'Heaviside :



Échelon unitaire défini par :

$$u(t) = 1 \quad \text{pour } t \geq 0 ;$$

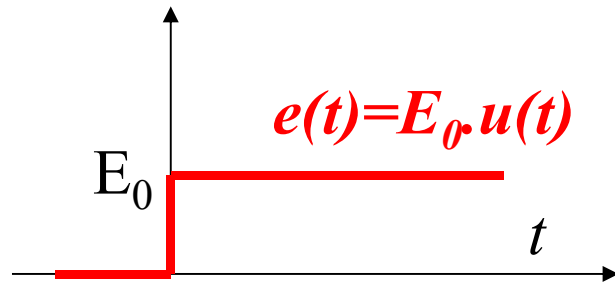
$$u(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Tous les phénomènes physiques que l'on étudiera commenceront à  $t=0$ , et seront nuls avant (grâce éventuellement à un changement d'origine). Toutes les fonctions seront donc multipliées par  $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$

# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

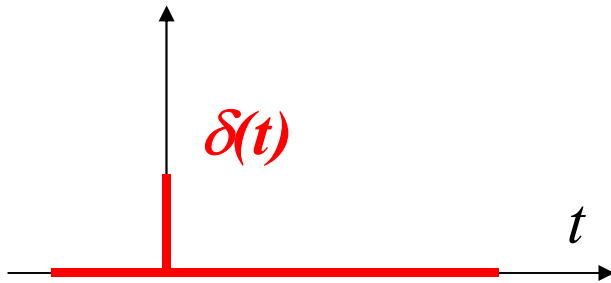
Échelon (ou « constante ») :



$$\mathcal{L}[E_0 \cdot u(t)] = \frac{E_0}{p}$$

# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

## Impulsion (de Dirac) :



Impulsion de Dirac définie par :

$$\delta(0) = +\infty ;$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{pour } t \neq 0 ;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$$

$$L[\delta(t)] = 1$$

L'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon



# Commande par retour d'état

Représentation externe et stabilité

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

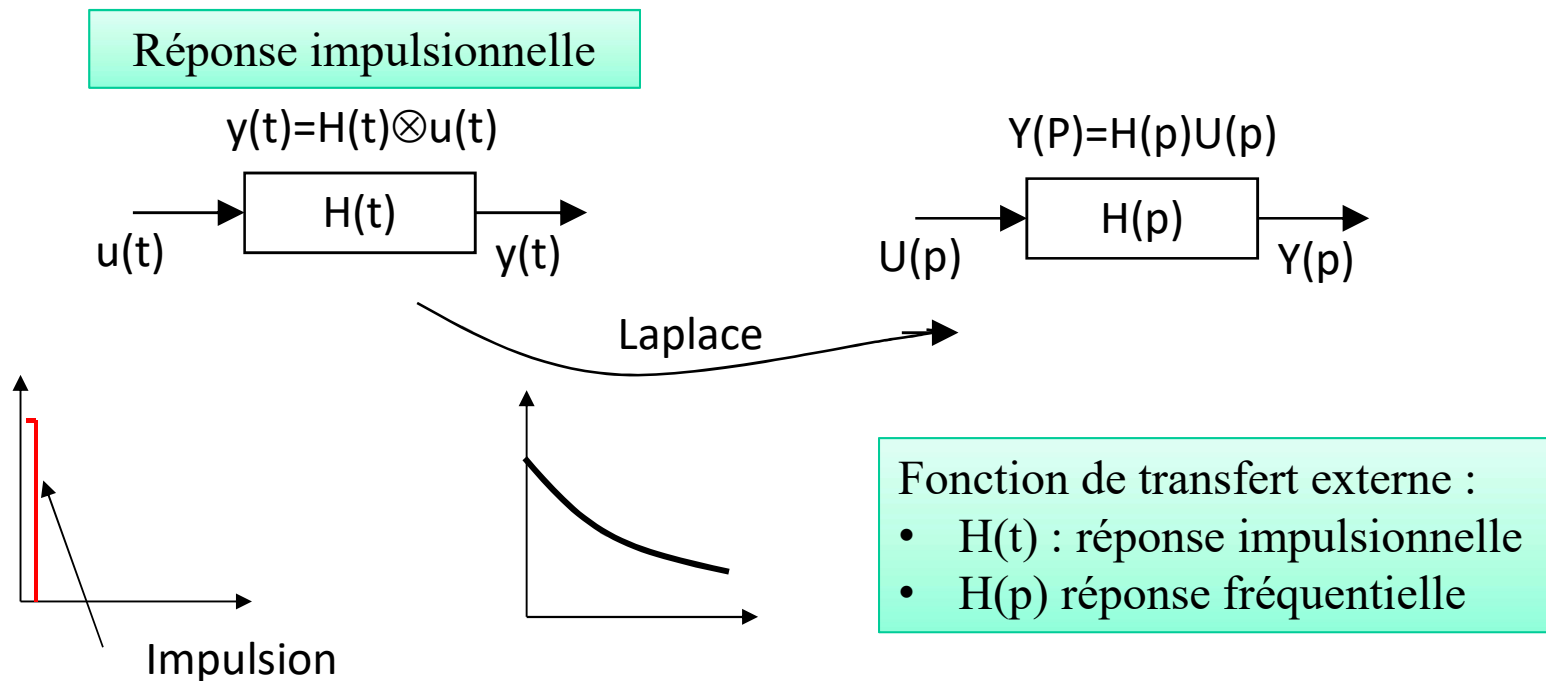
Commande par retour d'état

Régulateur / Observateur et RST

Synthèse

# Représentation Externe

- La fonction de transfert d'un système LTI est de la forme :



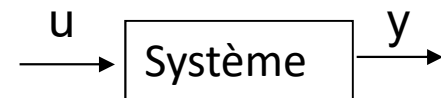
# Représentation Externe

- La fonction de transfert d'un système LTI est de la forme :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}$$

Fonction de  
transfert  
externe

- Vocabulaire :
  - $G(p)$  est la fonction de transfert du Système
  - L'ordre du système est  $n$
  - Les racines de  $B(p)$  sont les Zéros du Système
  - Les racines de  $A(p)$  sont les Pôles du Système
  - Si  $m < n$  le système est Strictement Propre
  - Si  $m = n$  le système est Propre
  - Si  $m > n$  le système est Impropre



# Représentation Externe

- Le système :

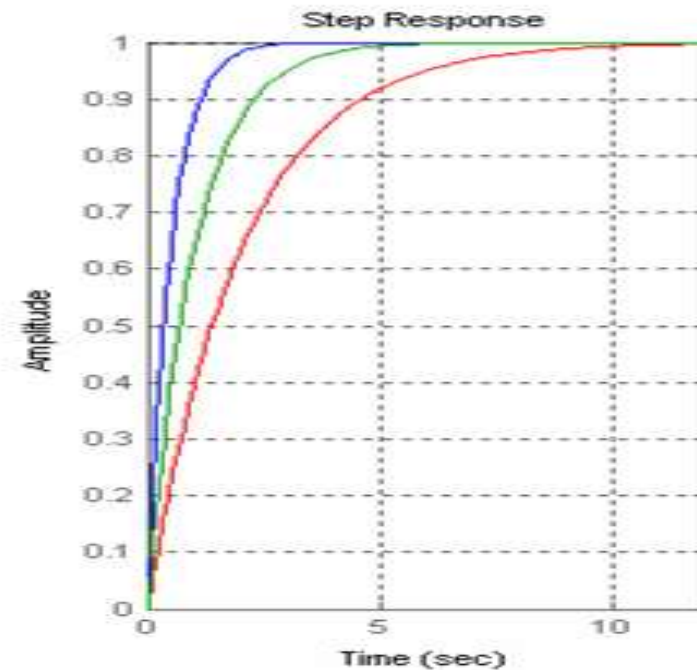
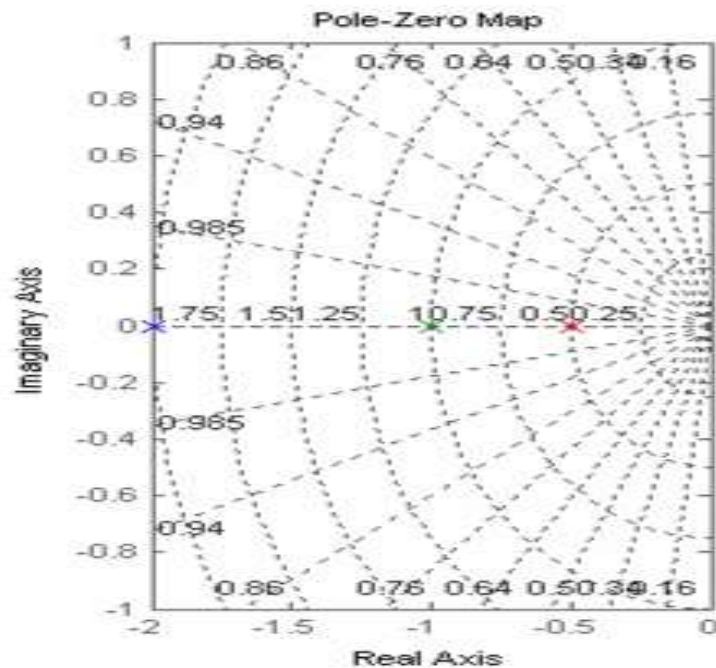
$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p}$$

- Est d'ordre 1
- Est strictement propre si  $b_1=0$
- Est propre si  $b_1 \neq 0$
- Le pôle du système est  $p = -a_0/a_1$
- Le zéro du système est  $z = -b_0/b_1$

## Etude d'un système du premier ordre stable

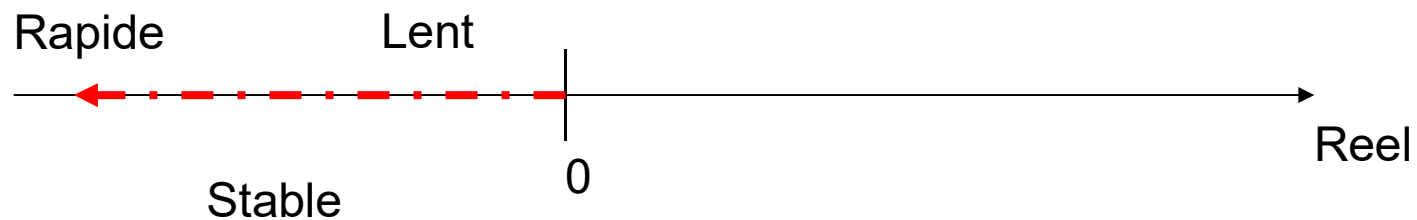
Etudions la réponse à un échelon d'un système du premier ordre de la forme:

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{p_i}} \quad \text{pour } p_i = \{0.5, 0.7, 2\}$$



**On observe que :**

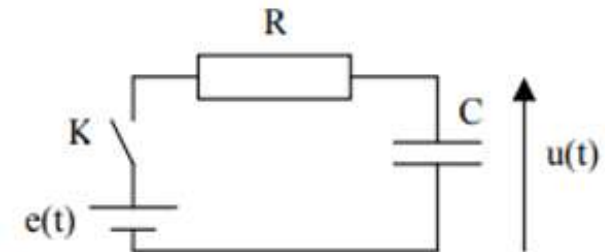
- Tous les pôles du système sont négatifs.
- Le système est stable (dans le sens entrée bornée / sortie bornée).
- Le système est d'autant plus rapide que le pole est grand en valeur absolue.



# Réponse à un échelon système 1er ordre

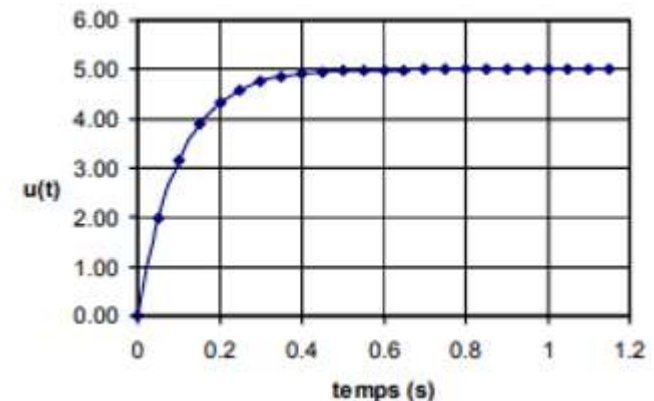
□ On considère un circuit électrique RC, dont le condensateur est déchargé. A  $t=0$  on ferme l'interrupteur

- L'allure de la tension peut être déterminée
  - ✓  $e(t) = Ri(t) + u(t)$  où  $i(t) = Cdu(t)/dt$
  - ✓  $e(t) = RCdu(t)/dt + u(t)$  avec  $e(t) = 5V$  (cte)  $\Rightarrow E(p) = 5/p$



- par la transformée de Laplace on a
  - ✓  $E(p) = RCpU(p) + U(p)$
  - ✓  $U(p) = E(p) \cdot \frac{1}{(1 + RC \cdot p)} = \frac{5}{p \cdot (1 + RC \cdot p)}$
- par la transformée de Laplace inverse on obtient :

- ✓ 
$$u(t) = 5 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

□ On considère la fonction de transfert



✓ Où

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

- $k$  est le gain statique du système
- $\tau$  est la constante de temps  $> 0$ , elle caractérise la vitesse d'évolution de la sortie  $y(t)$

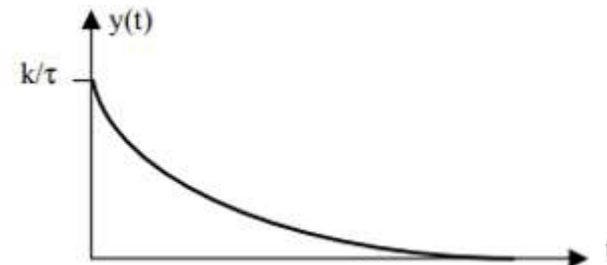
✓ Réponse impulsionnelle : entrée de type Dirac,  $x(t) = \delta(t)$

- Donne d'après Laplace la relation

$$Y(p) = X(p).G(p) = 1 \times \frac{k}{1 + \tau.p} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

- et le Laplacien inverse donne la réponse temporelle suivante :

$$s(t) = \frac{k}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$





# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

- ✓ Réponse indicielle:  $x(t) = u(t) = 1$



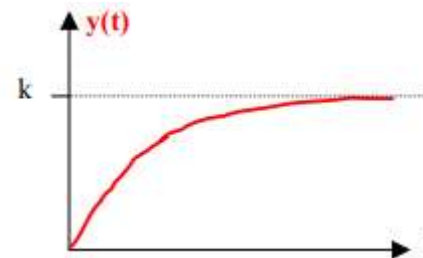
$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

- On a d'après Laplace la relation

$$Y(p) = X(p).G(p) = \frac{1}{p} \times \frac{k}{1 + \tau.p} = \frac{k}{p.(1 + \tau.p)}$$

- et le Laplacien inverse donne la réponse temporelle suivante :

$$y(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$



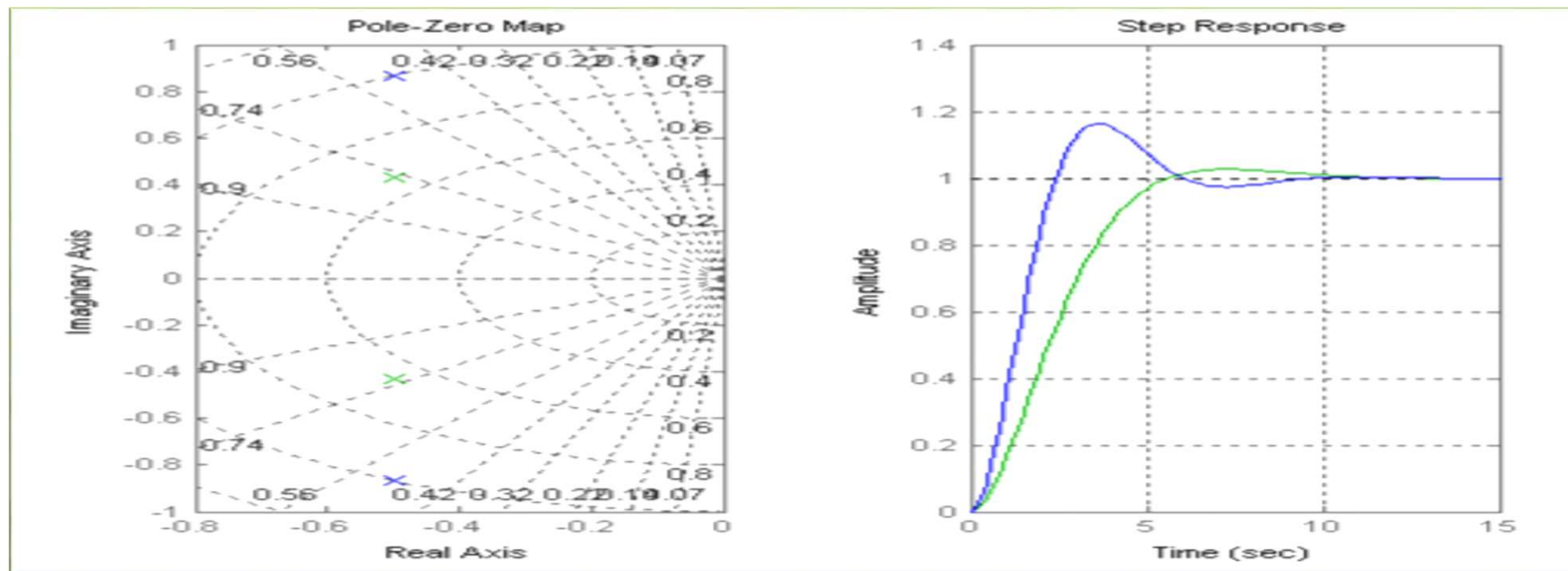
t =	y(t) =
$\tau$	0,63.k
$3 \times \tau$	0,95.k
$5 \times \tau$	0,99.k

Temps de réponse à 5% :  
 $Tr_{5\%} = 3.\tau$

# Réponse à un échelon 2<sup>ème</sup> ordre

□ Système du second ordre :  $G(p) = \frac{c}{(p^2 + p + c)}$

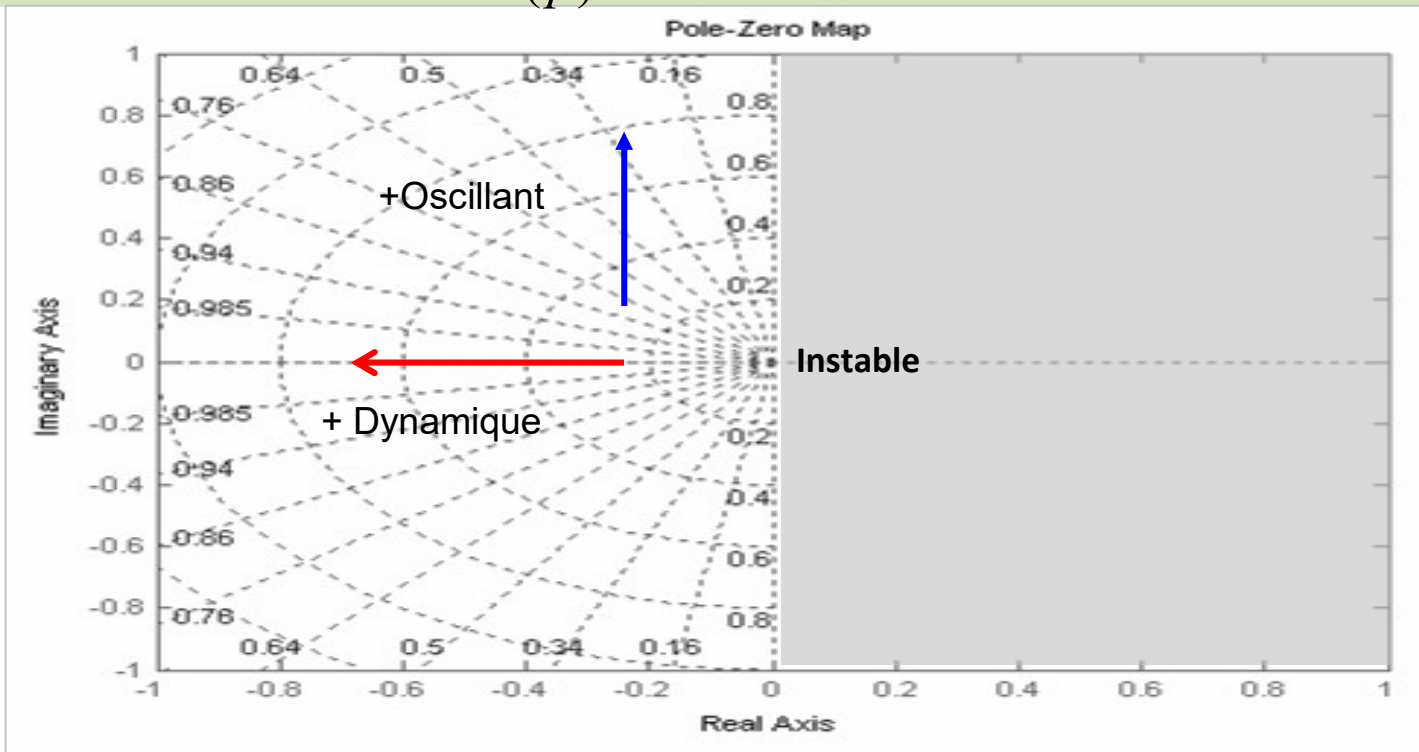
- Cas 1 pour  $c=1 \rightarrow$  Pôles  $-0.5 \pm 0.866i$
- Cas 2 pour  $c=0.4375 \rightarrow$  Pôles  $-0.5 \pm 0.433i$



# Domaine de stabilité

- Un système est stable si et seulement si les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative :

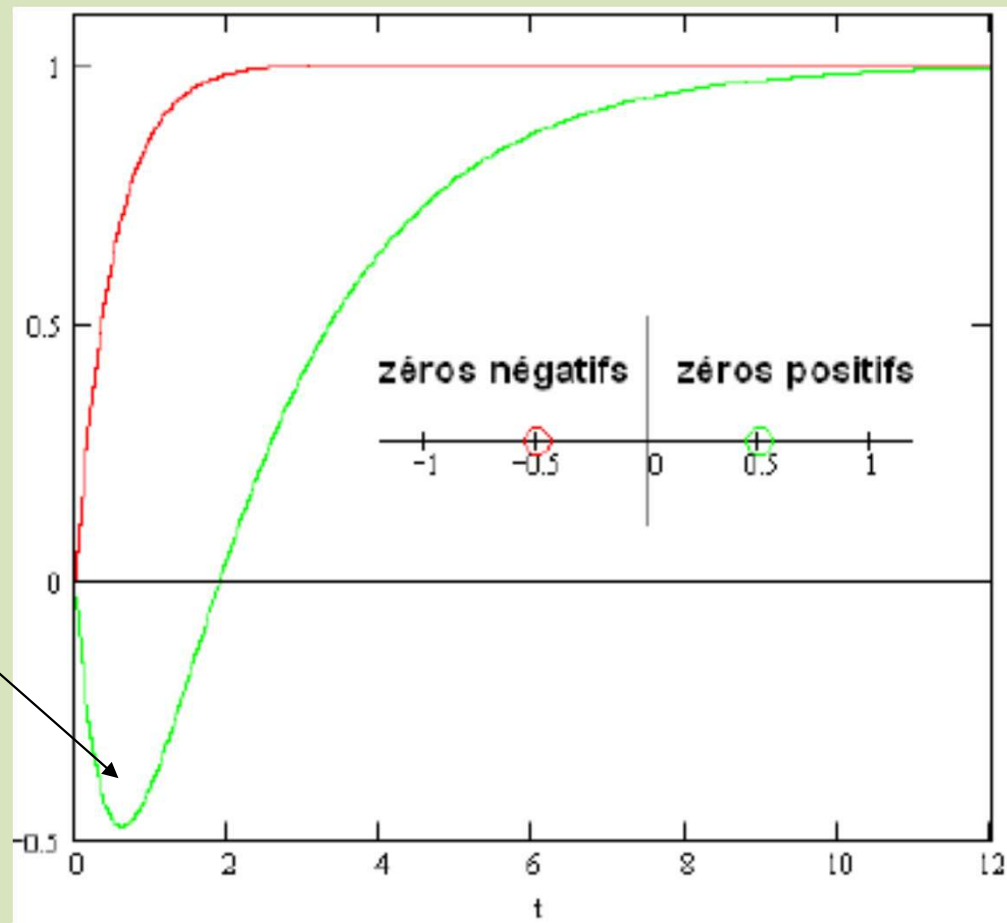
$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \text{ est stable } \Leftrightarrow \{ \forall p / A(p) = 0 \rightarrow \Re(p) < 0 \}$$



# Influence des zéros

- Un système qui a un zéro à partie réelle positive est un système à non minimum de phase

Influence d'un zéros dans le demi plan droit



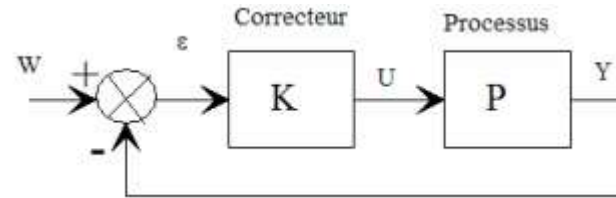
# Matlab : Création du système

□ Fonction : tf

$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)}$$

```
>> B=1 ;  
>> A=[1 1 1] ;  
>> tf(B,A)  
  
Transfer function:  
      1  
-----  
s^2 + s + 1  
  
>> pzmap(B,A) ;
```

# Commande classique d'asservissement



*On note  $L = K \cdot P$  le transfert de boucle*

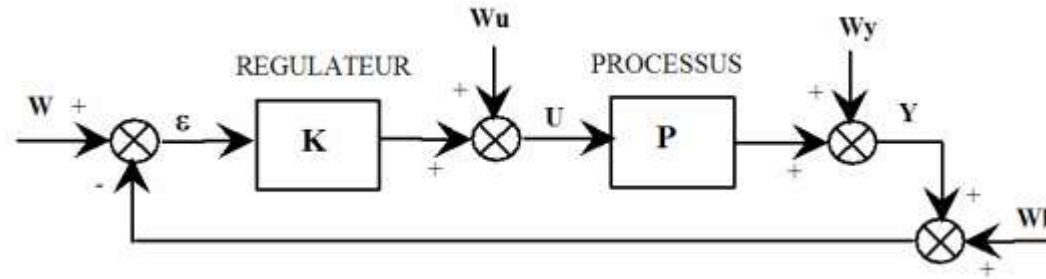
*On note  $S$  la fonction de sensibilité*

$$\frac{\varepsilon}{W} = \frac{1}{1+L} = S$$

*On note  $T$  la fonction de sensibilité complémentaire*

$$\frac{Y}{W} = \frac{L}{1+L} = T$$

# Commande classique d'asservissement + perturbations



Avec :

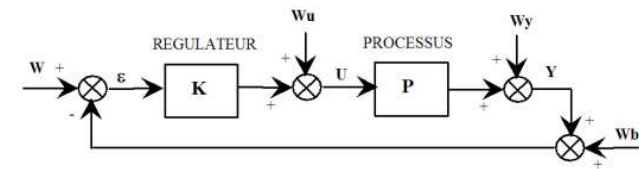
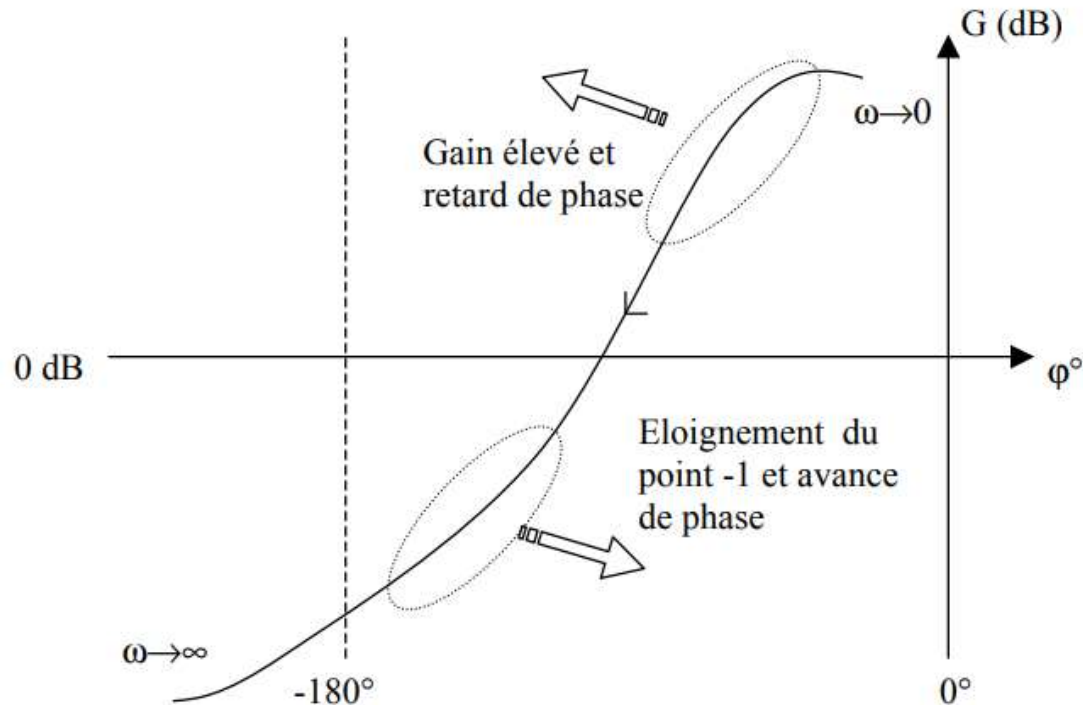
- $W_u$  bruit sur l'entrée  $u$
- $W_y$  bruit de sortie
- $W_b$  bruit de mesure

La sortie  $Y$  est alors donnée par la relation suivante

$$Y = \frac{K.P}{1+K.P} \cdot W + \frac{P}{1+K.P} \cdot W_u + \frac{1}{1+K.P} \cdot W_y - \frac{K.P}{1+K.P} \cdot W_b$$

# Allure recherchée lors de l'étude du correcteur K

- d'éloigner le lieu de Black du point -1 (0 dB, -180°) de façon à augmenter la stabilité, c'est à dire augmentation de la marge de gain et de la marge de phase. Souvent on choisit:  $M_G = 10$  dB et  $M_\varphi \geq 45^\circ$



Retard de phase

$$K(p) = \frac{1 + \tau_n \cdot p}{1 + b \cdot \tau_n \cdot p}, \quad b > 1$$

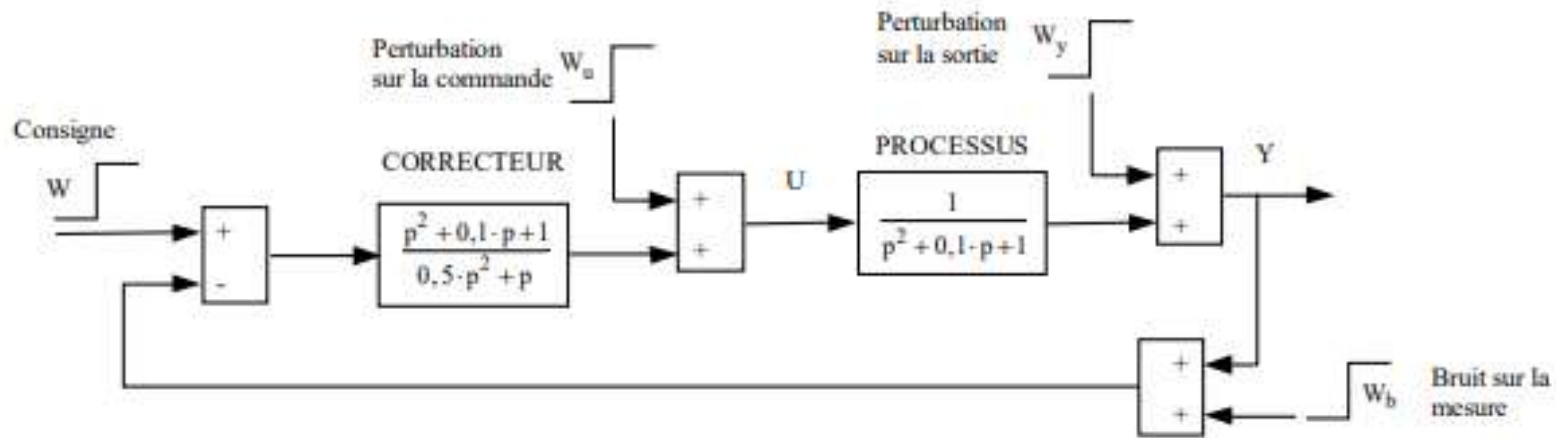
Avance de phase

$$K(p) = \frac{1 + a \cdot \tau_n \cdot p}{1 + \tau_n \cdot p}, \quad a > 1$$

- d'augmenter le gain du système en boucle ouverte pour augmenter la précision. L'annulation de l'erreur statique peut être obtenue si le système en boucle ouverte admet une intégration ( $1/p$ ).
- D'augmenter la bande passante, ce qui diminue le temps de réponse,
- Provoquer une avance de phase en moyenne et haute fréquences et un retard de phase en basse fréquence pour une meilleure stabilité.



# Exemple

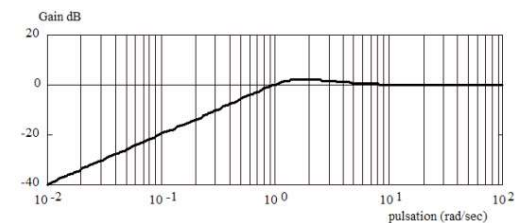
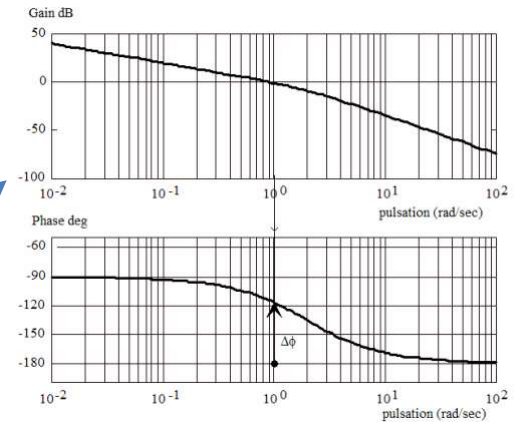


Montrer que  $\frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{1}{0,5.p^2 + p + 1}$

Transfert de boucle  $K(p).P(p) = \frac{B(p).R(p)}{A(p).S(p)} = \frac{1}{0,5.p^2 + p}$

Sensibilité  $\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{A(p).S(p)}{A(p).S(p) + B(p).R(p)}$

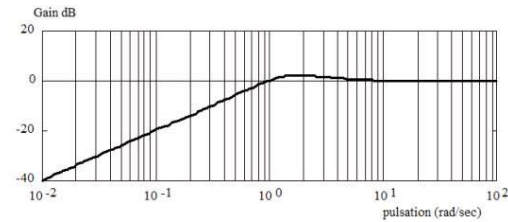
$\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{0,5.p^2 + p}{0,5.p^2 + p + 1}$



Réponse fréquentielle 49

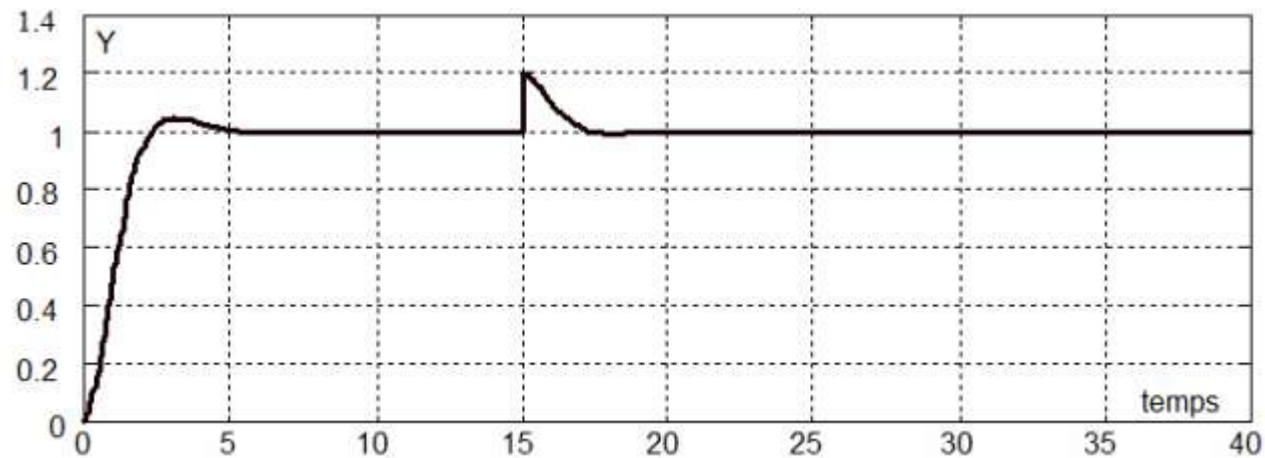
# Exemple

Sensibilité  $\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{0,5.p^2 + p}{0,5.p^2 + p + 1}$



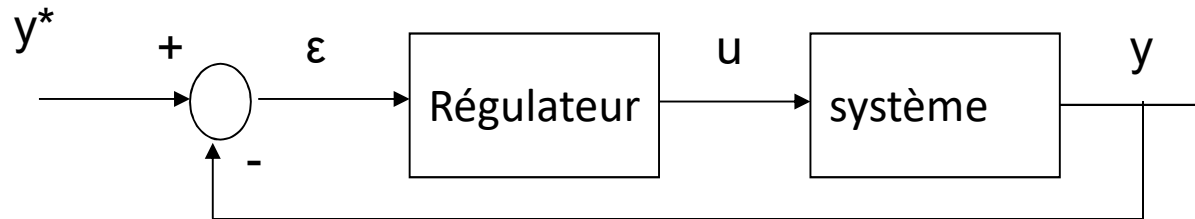
Réponse fréquentielle

Réponse temporelle à une perturbation échelon en sortie à t=15s



Réponse indicielle avec une perturbation sur la sortie

## Etude des correcteurs : Régulateur de type proportionnel intégrale dérivée



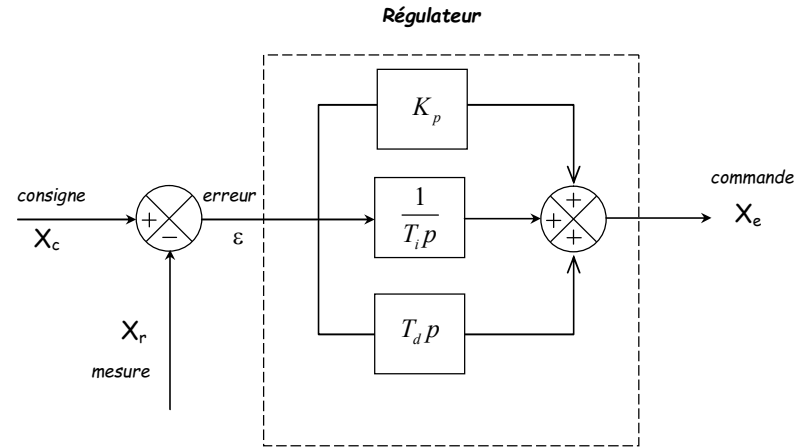
$$u(t) = K_p * (y(t) - y(t)^*) + K_i \int (y(t) - y(t)^*) dt + K_d \frac{d}{dt} (y(t) - y(t)^*)$$
$$= K_p * \varepsilon(t) + K_i \int \varepsilon(t) dt + \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$$

Pour augmenter la dynamique et compenser les inerties dues au temps mort on ajoute une action dérivée au régulateur.

## Structure : Régulateur de type proportionnel intégrale dérivée

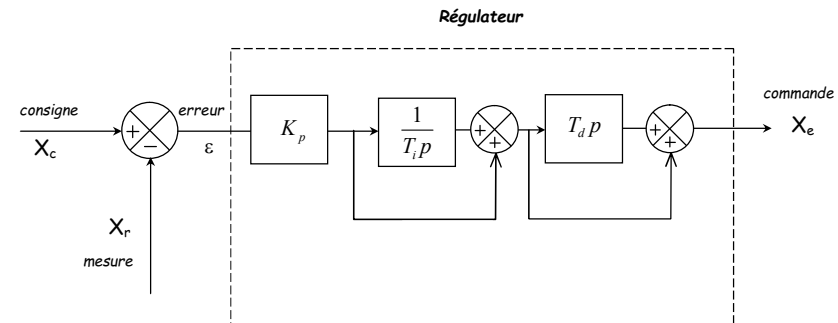
### Parallèle

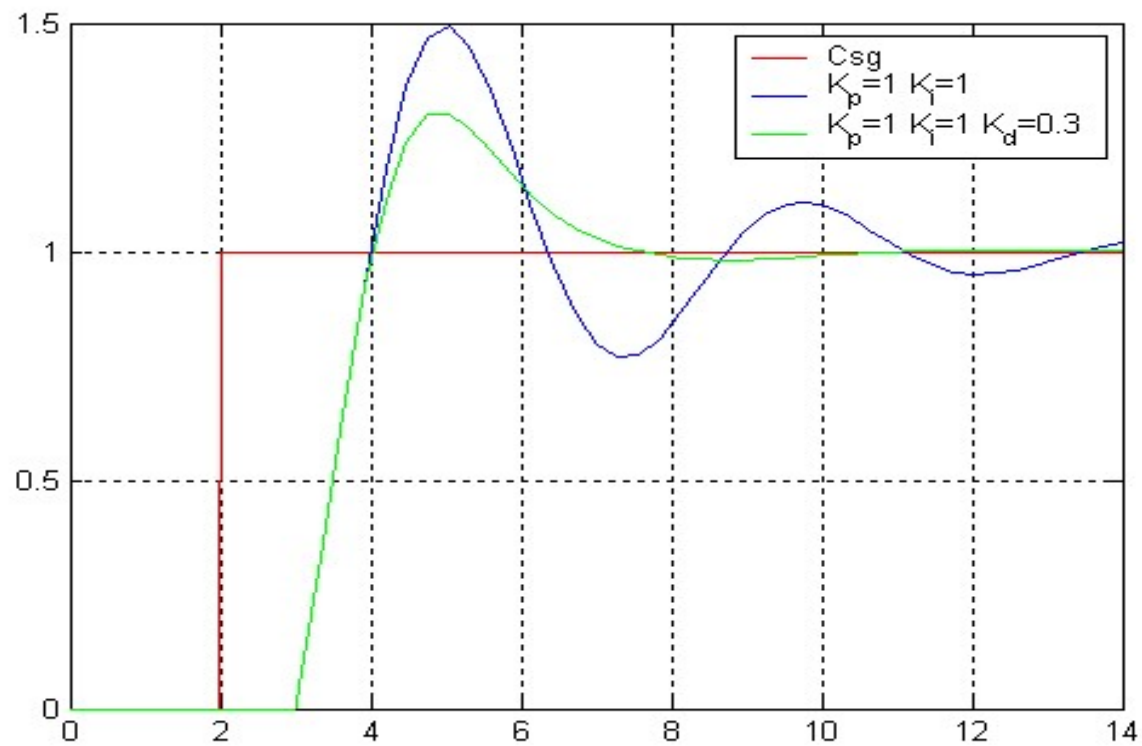
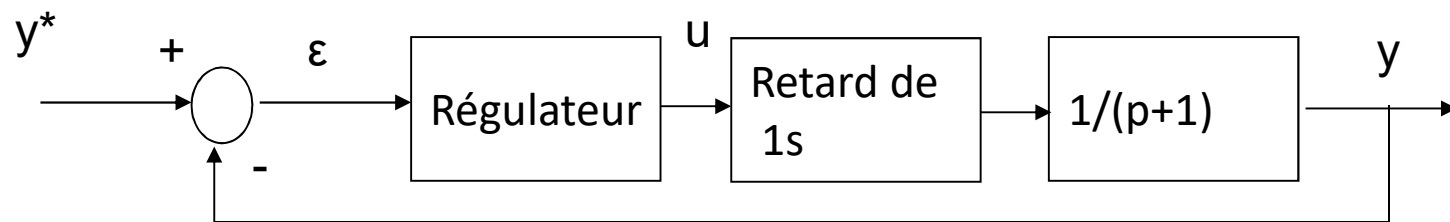
$$C(p) = \frac{X_e(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + T_d p + \frac{1}{T_i p}$$



### Série

$$C(p) = \frac{X_e(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$$





## Résumé : du régulateur PID

Action	Avantage	Désavantage
P	Dynamique	Ne permet pas d'annuler une erreur statique
I	Annulation d'erreur statique	Action lente
D	Action très dynamique	Sensibilité aux bruits

### Avantage des régulateur PID :

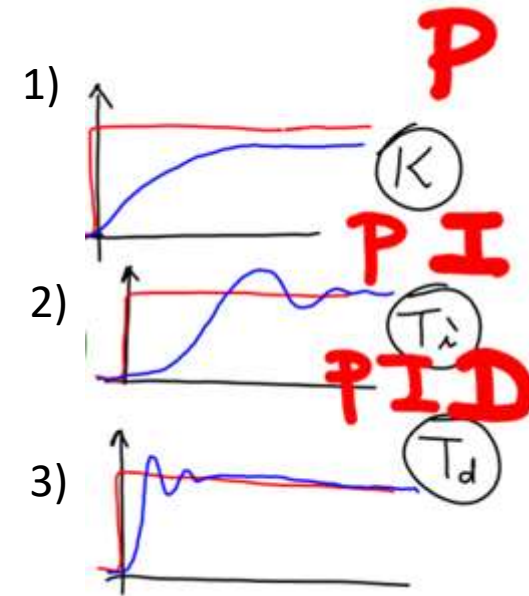
- Structure simple
- Pas besoin de modélisation pour la synthèse du régulateur

### Désavantage des régulateur PID

- Réglage empirique
- Pas de garantie sur les performances et la stabilité

## Résumé : du régulateur PID

- 1) Le correcteur proportionnel amplifie le signal d'erreur mais il persiste une erreur.
- 2) On ajoute un correcteur intégral pour annuler l'erreur statique.
- 3) Si le système ne réagit pas assez vite, il convient d'ajouter le correcteur dérivé.

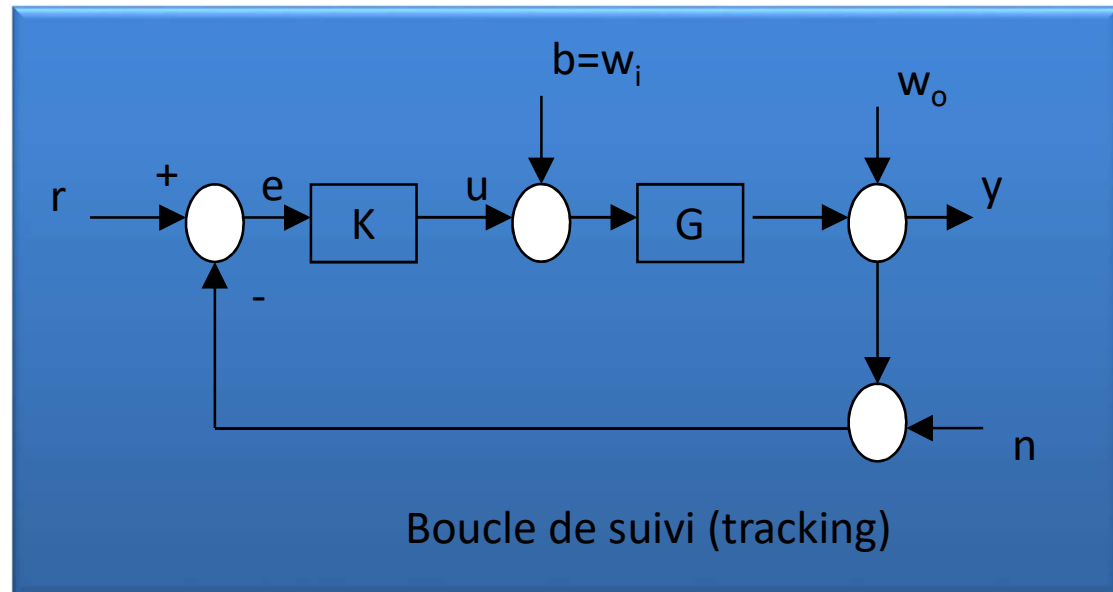


# Rappel: Boucle d'asservissement

□ Montrer que :

$$\begin{pmatrix} e(s) \\ u(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S(s) & S(s)G(s) \\ K(s)S(s) & K(s)S(s)G(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

avec 
$$S(s) = \frac{1}{1+K(s)G(s)}$$





# Exemple stabilité externe et interne

- Stabilité externe : On considère le système G et le correcteur K :

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad K(s) = \frac{s}{s+1}$$

✓ On obtient  $\left. \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{w_i=w_o=n=0} = T(s) = \frac{1}{1+(s+1)^2}$

- ✓ Lequel est BIBO stable, puisqu'il n'y a pas de changement de signe au dénominateur (critère de Routh)

- Stabilité interne  $\left. \frac{y(s)}{w_i(s)} \right|_{w_o=n=r=0} = G(s)(I+K(s)G(s))^{-1} = \frac{s+1}{s(1+(s+1)^2)}$

- ✓ Instable, d'après le transfert  $G(s)K(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{s}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$

- ✓ On constate qu'il y a eu simplification du pôle instable  $s=0$ , par un zéro de K

# Compensation de pôles et/ou zéros instables

- Hypothèse : Pour assurer une stabilité interne en présence de pôles et/ou zéros instables on suppose qu'il n'y a pas de compensation de pôles et zéros entre  $K(s)$  et  $G(s)$  (robustesse aux incertitudes de modèle).

- Exemple:  $P(s) = \frac{1}{s-1}$ ,  $K_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$ ,  $K_2(s) = 2$

- Le correcteur  $K_1(s)$  compense le pôle instable  $p=1$ , on obtient dès lors pour  $K_1(s)$  et  $K_2(s)$  respectivement les fonctions de sensibilité complémentaire

$$T_1(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}, \quad T_2(s) = \frac{\frac{2}{s-1}}{1 + \frac{2}{s-1}} = \frac{2}{s+1}, \quad P^\delta(s) = \frac{1}{s-1+\delta},$$

- Si l'on considère maintenant une petite variation  $\delta$  du pôle du procédé alors :

$$T_1(s) = \frac{\frac{1}{s-1+\delta} \frac{s-1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s-1+\delta} \frac{s-1}{s+1}} = \frac{s-1}{(s-1+\delta)(s+1) + s-1} = \frac{s-1}{s^2 + (\delta+1)s + \delta - 2}, \quad T_2(s) = \frac{\frac{2}{s-1+\delta}}{1 + \frac{2}{s-1+\delta}} = \frac{2}{s+1+\delta}$$

- ✓  $T_1(s)$  est alors instable pour une perturbation  $\delta$  très faible, alors que  $T_2(s)$  reste stable pour  $\delta > -1$

## Obtention des objectifs de synthèse

- On peut déduire le comportement asymptotique des fonctions de transfert composant  $M(s)$  en faisant des hypothèses sur le gain de la BO :

– Si le gain de la BO est grand soit  $|G(j\omega)K(j\omega)| \gg 1$

$$M(j\omega) \cong \begin{pmatrix} (G(j\omega)K(j\omega))^{-1} & K(j\omega)^{-1} \\ G(j\omega)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

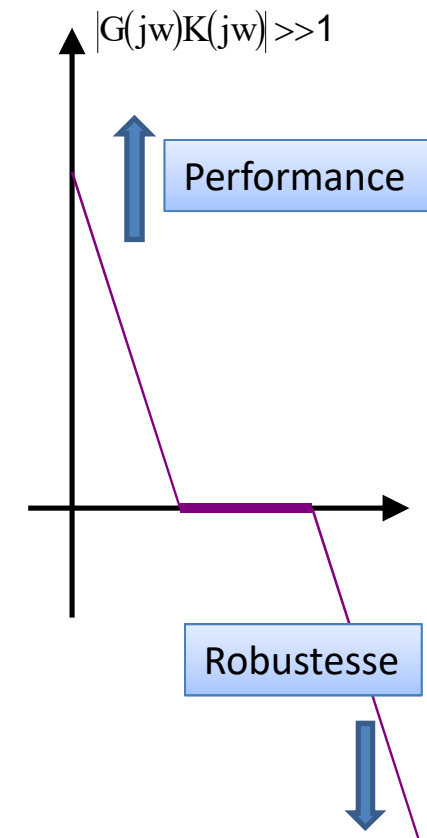
»  $K$  agit sur les transferts de  $r$  vers  $\varepsilon$  et de  $b$  vers  $\varepsilon$

» cette approximation intervient notamment en basse fréquence, par exemple si  $K(s)$  présente un pôle en 0, le gain de la BO tend vers l'infini en basse fréquence et les transferts  $S(s)$  et  $S(s)G(s)$  ont un zéros en 0, ce qui signifie l'absence d'erreur statique pour les signaux  $r$  et  $b$  constants.

»  $u$  est directement influencé en basse fréquence (module = 1) par  $b$  afin de le compenser ( $u=b$ )

$$\begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix}$$



## Obtention des objectifs de synthèse

$$\begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$$

- Si le gain de la BO est faible en HF

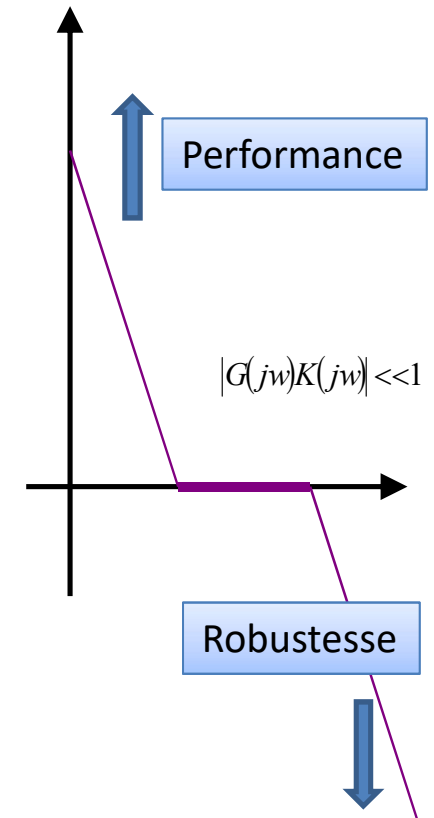
$$|G(j\omega)K(j\omega)| \ll 1$$

- alors les transferts asymptotiques sont réduits à :

$$M(j\omega) \cong \begin{pmatrix} 1 & G(j\omega) \\ K(j\omega) & G(j\omega)K(j\omega) \end{pmatrix}$$

- »  $K(s)$  agit sur les transferts de  $r$  vers  $u$  et de  $b$  vers  $u$ , tandis qu'il est sans effet sur les transferts de  $r$  vers  $\varepsilon$  et de  $b$  vers  $\varepsilon$
- » cette approximation intervient notamment en HF car le gain du système non corrigé a naturellement tendance à décroître avec la fréquence et l'on cherche en général à synthétiser un correcteur qui atténue les hautes fréquences, pour
  - éviter d'exciter inutilement la commande en dehors de la BP de l'asservissement
  - ne pas solliciter les dynamiques négligées ou mal modélisées en dehors de la BP

$$M = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix}$$



# Commande par retour d'état

Représentation interne

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état

Régulateur / Observateur et RST

Synthèse

# Représentation Interne

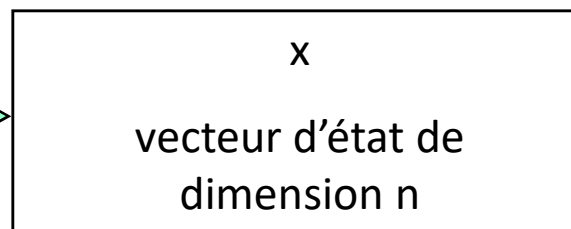
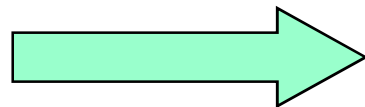
## □ Modèle d'état de la forme

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

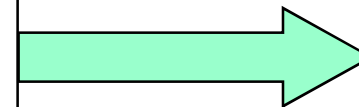
$$y = Cx + Du$$

- Où  $x$  est l'état,  $u$  est la commande et  $y$  les mesures

$u$  : vecteur des entrées  
de dimension  $n_u$



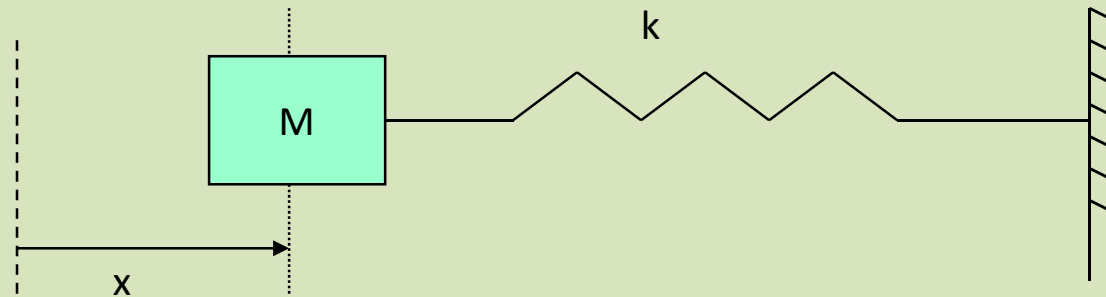
$y$  : vecteur de sortie  
de dimension  $m$



# Représentation interne

## □ Oscillateur harmonique

- Le système est formé d'une masse  $M$  soumise à un ressort de raideur  $k$ .



- Principe fondamental de la dynamique :  $M\ddot{x} = -kx$ , où  $\ddot{x} \equiv \frac{d^2x}{dt^2}$
- Représentation d'état par variable de phase :

Représentation interne  $\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

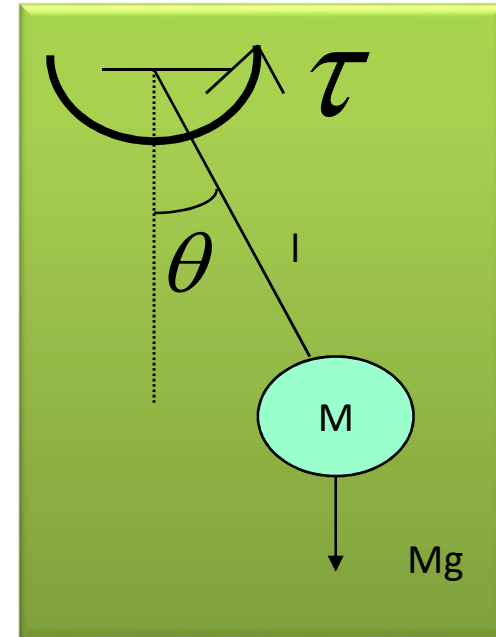
# Représentation interne

## □ Pendule

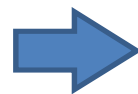
- Le système est formé d'une masse  $M$  suspendue à un fil rigide de longueur  $l$  fixé en  $O$ , soumise à l'action du champ de gravité  $g$ .

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + g/l \sin \theta = \tau / Ml^2$$

- Représentation d'état linéaire par variable de phase autour de l'équilibre :



Représentation interne  
du système linéaire  
DL à l'ordre 1 :  $\sin \theta \cong \theta$   
autour de l'équilibre



$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g/l & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/Ml^2 \end{pmatrix} \tau$$



# Représentation interne

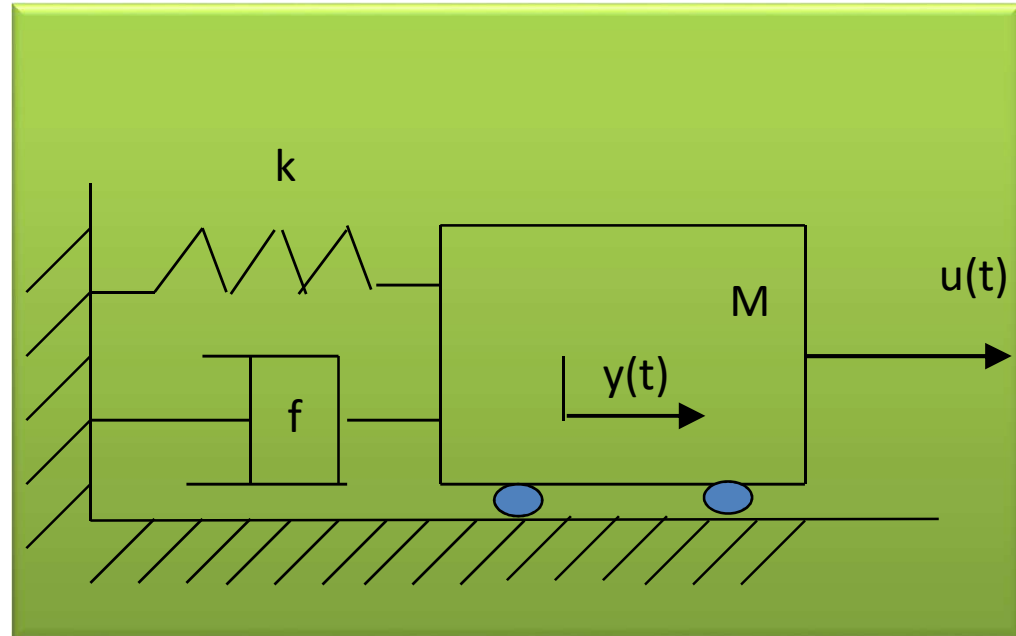
## □ Mobile

- $u(t)$  est le signal de commande

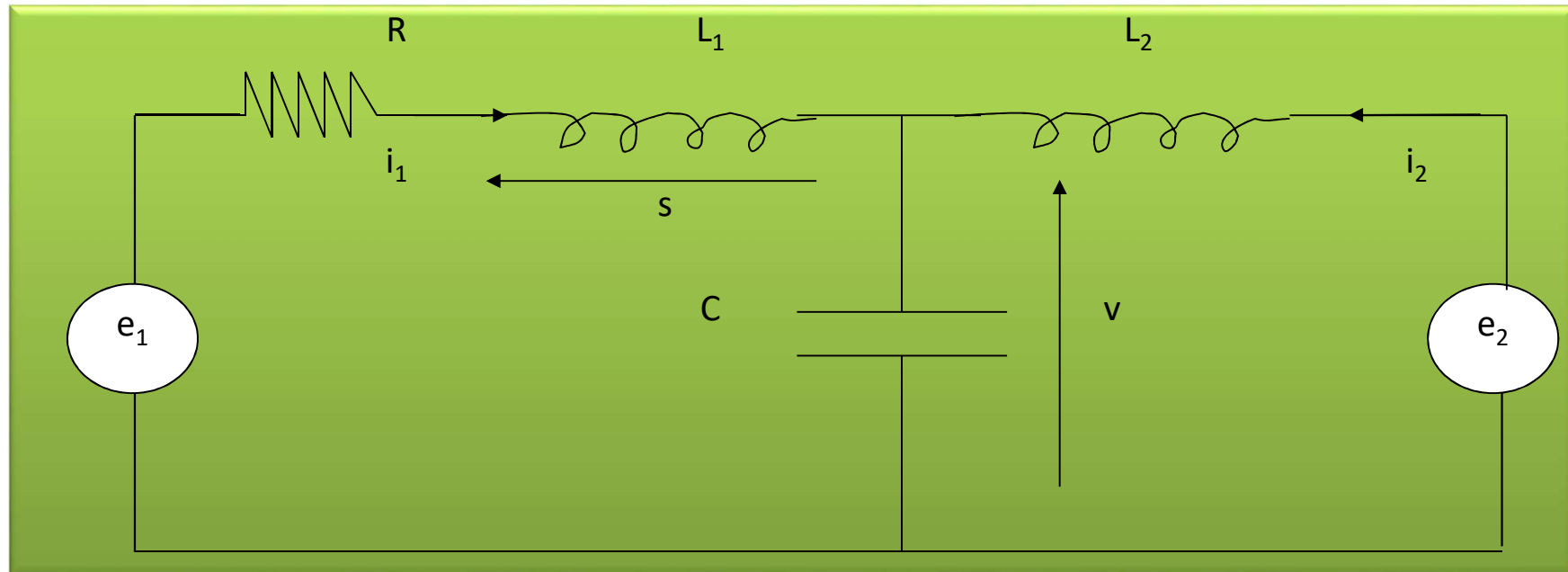
$$M\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t) = u(t)$$

Représentation interne :

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ \left( \begin{array}{c} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/M & -f/M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/M \end{pmatrix} u \end{matrix}$$



# Représentation interne



Avec :

$s$  est la sortie du système et correspond à la tension aux bornes de la self  $L_1$ ,  
 $i_1$  et  $i_2$  sont les intensités des selfs  $L_1$  et  $L_2$ ,  
 $e_1$  et  $e_2$  sont deux générateurs de tension,  
et  $v$  est la tension aux bornes du condensateur  $C$ .

# Représentation interne

La représentation d'état permet de mettre en évidence des informations internes au processus, qui n'apparaissent pas nécessairement sur la description par fonction (ou matrice) de transfert.

**Modélisation :**

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1(t) = Ri_1(t) + L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + v(t) \\ e_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + v(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} (i_1(t) + i_2(t)) \\ s(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} \end{array} \right.$$

Cette formulation différentielle fait apparaître explicitement la dynamique du procédé, à savoir : les deux courants  $i_1$  et  $i_2$  et la tension  $v$ .

Ces variables ( $i_1$ ,  $i_2$  et  $v$ ) sont associées aux éléments pouvant stocker de l'énergie (respectivement  $L_1$ ,  $L_2$  et  $C$ ) et auxquelles on pourra donc attribuer des conditions initiales.

# Variables d'états

□ Par définition les variables d'état (internes) du système électrique correspondent aux variables pouvant stocker de l'énergie ici  $i_1$ ,  $i_2$  et  $v$

□ Elles forment le vecteur d'état :  $\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ v(t) \end{bmatrix}$

□ Avec pour CI :  $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} i_1(0) \\ i_2(0) \\ v(0) \end{bmatrix}$

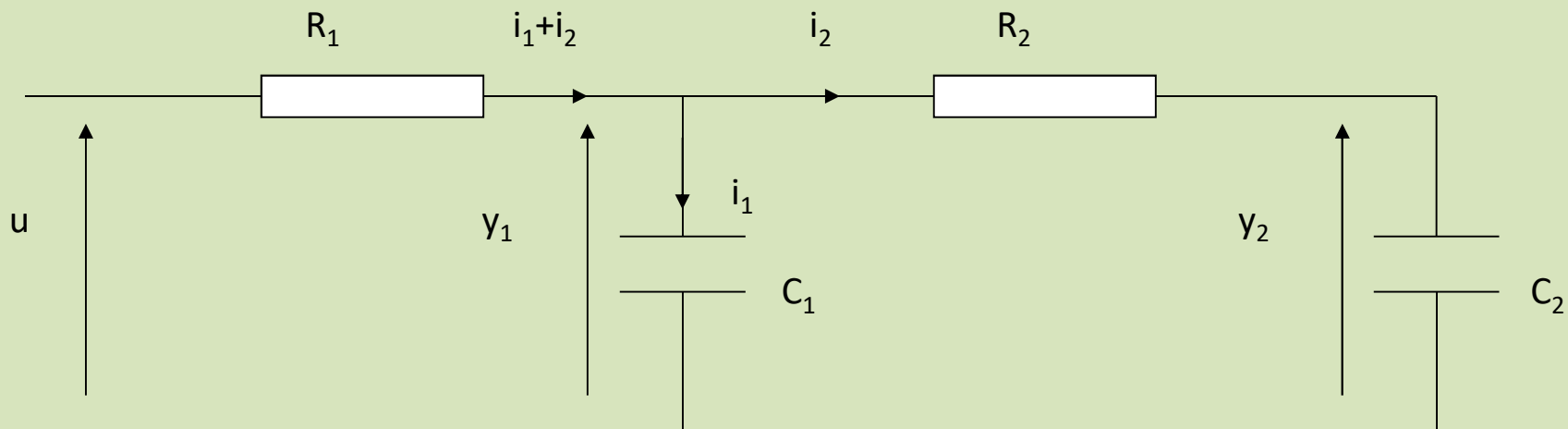
# Mise sous la forme matricielle

□ Déduire les matrices A, B, C et D sachant que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L_1} i_1(t) - \frac{1}{L_1} v(t) + \frac{1}{L_1} e_1(t) \\ \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{1}{L_2} v(t) + \frac{1}{L_2} e_2(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{C} (i_1(t) + i_2(t)) \\ s(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} = -Ri_1(t) - v(t) + e_1(t) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = -\frac{R}{L_1} x_1(t) - \frac{1}{L_1} x_3(t) + \frac{1}{L_1} u_1(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\frac{1}{L_2} x_3(t) + \frac{1}{L_2} u_2(t) \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = \frac{1}{C} (x_1(t) + x_2(t)) \\ y(t) = -Rx_1(t) - x_3(t) + u_1(t) \end{array} \right.$$

# Autre exemple électrique

- ❑ La représentation d'état peut être orientée de façon à faire apparaître explicitement des variables (d'état) choisies par l'utilisateur.
- ❑ Exemple :
  - ❑ 1<sup>er</sup> cas avec  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$
  - ❑ 2<sup>ème</sup> cas avec  $y_2(t)$  et  $i_2(t)$ .



# Autre exemple électrique

□ 1<sup>er</sup> cas on le vecteur d'état  $x$  composé des états  $y_1(t)$

et  $y_2(t)$  :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

□ Montrer que :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C_2} & \frac{1}{R_2 C_2} \\ \frac{1}{R_2 C_1} & -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 C_1 \end{bmatrix} u$$
$$y = [1 \ 0] x$$

# Autre exemple électrique

- 2<sup>ème</sup> cas, on considère le vecteur d'état :

$$\underline{\hat{x}} = \begin{bmatrix} y_2 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

- Montrer que :  $\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u$

$$y = \hat{C}\hat{x}$$

- avec

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{R_1 R_2 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_2 C_1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/R_1 R_2 C_1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [1 \ 0]$$

- On peut noter que cette seconde représentation est semblable à la première, à ceci près que le nouvel état est une combinaison linéaire de l'état  $x$ .



# Changement de base

□ Matrice de passage :  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$

▪ où  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/R_2 & 1/R_2 \end{bmatrix}$

□ Montrer que :  $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$$

□ Aide :  $\frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_2}(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)$

# Passage de la représentation d'état à la représentation externe.

## □ Représentation d'état

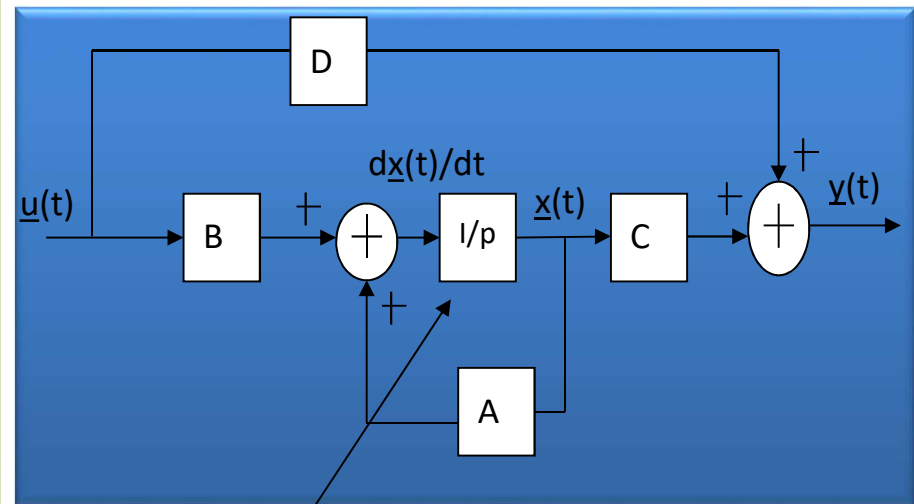
$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) \end{cases}$$

## □ Laplace

$$\begin{cases} p\underline{x}(p) = A\underline{x}(p) + B\underline{u}(p) \\ \underline{y}(p) = C\underline{x}(p) + D\underline{u}(p) \end{cases}$$

$$\underline{y}(p) = (C(pI - A)^{-1}B + D)\underline{u}(p)$$

Schéma bloc



La mémoire du système

# Passage de la représentation externe à la représentation d'état.

## □ Représentation externe

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{Y(p) X(p)}{X(p) U(p)}$$

## □ Laplace inverse

$$\frac{X(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 x(t) = u(t)$$

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = b_0 + b_1 p + \dots + b_m p^m$$

$$y(t) = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m}$$

# Obtention de la représentation d'état

□ On pose les variables de phase :

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= -a_0x_1 - a_1x_2 \cdots - a_{n-1}x_n + u \end{aligned}$$

□ On obtient la représentation d'état:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \underline{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = (b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m \ 0 \ \cdots \ 0) \underline{x}(t)$$

Les modes de A sont les pôles de la fonction de transfert.


# Réponse des systèmes linéaires invariants

□ Cas scalaire


$$\begin{cases} \dot{x} = ax + bu \\ y = cx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

□ Problème : déterminer l'évolution de  $x(t)$  et  $y(t)$  sous l'influence de  $u(t)$  et  $x(0)$ .

□ Système libre ou autonome ( $x(0) \neq 0$  et  $u(t)=0$ )

  $x(t) = e^{at}x(0), \quad y(t) = cx(t)$

□ Système forcé ( $x(0) \neq 0$  et  $u(t) \neq 0$ )

  $x(t) = e^{at}x(0) + \int_0^t e^{a(t-\tau)}bu(\tau)d\tau$   
 $y(t) = cx(t)$

# Réponse des systèmes linéaires invariants

- ❑ Cas matricielle  $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$
- ❑ Problème : déterminer l'exponentielle de matrice
  - 3 approches, pour les détails voir polycopié de cours.
    - ✓ Calcul des valeurs et vecteur propres
    - ✓ Calcul des valeurs propres et des  $\alpha_i$
    - ✓ Calcul du Laplace inverse  $e^{At} = L^{-1}(pI - A)^{-1}$

# Commande par retour d'état

Commandabilité et Observabilité

Commande par retour d'état

Régulateur / Observateur et RST

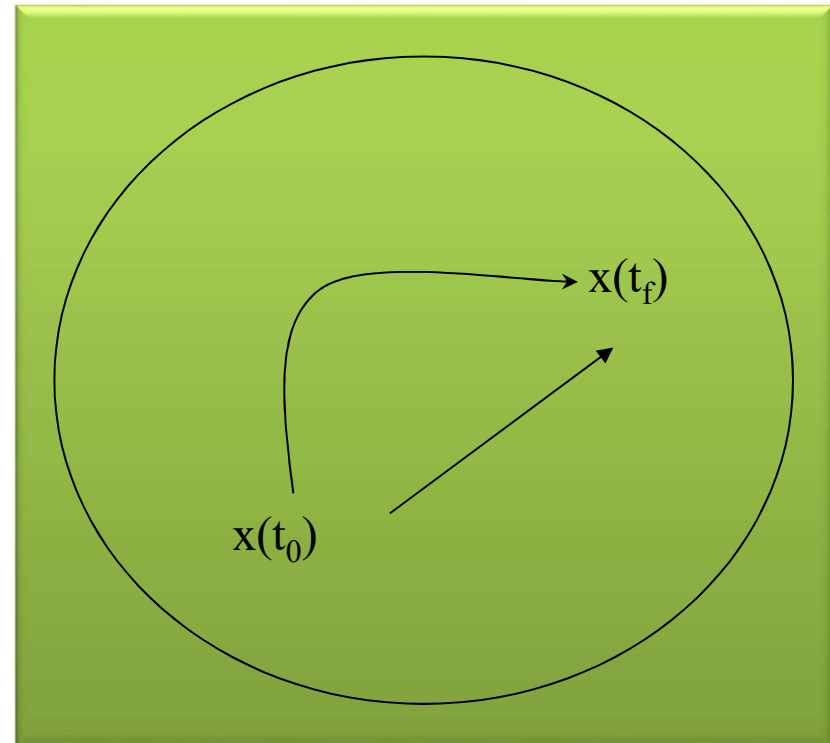
Synthèse

# Propriétés de commandabilité et d'observabilité

## **Commandabilité**

Peut-on amener en un temps fini le système à commander d'un état arbitraire  $x(t_0)$  à un état désiré  $x(t_f)$  avec une loi de commande admissible?

→ Concept de Commandabilité des systèmes

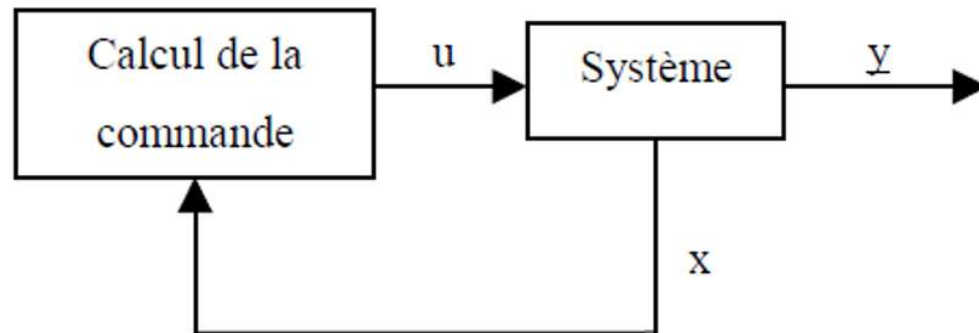




# Pourquoi étudier les propriétés de commandabilité ?

- ❑ Réponse : s'assurer avant de calculer la commande que le système est bien contrôlable.

– l'état est accessible à la mesure



# Commandabilité au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman

- Un système linéaire stationnaire est commandable vis à vis des états si et seulement si la matrice de commandabilité est de plein rang :

$$C_{(A,B)} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$$

$$\text{rang}[B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] = n = \dim(x)$$

# Etats commandables au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman :

- La paire  $(A,B)$  est complètement commandable (CC) s'il est possible en agissant sur  $u$  d'amener en un temps fini  $(t_1-t_0)$  n'importe quel état  $x(t_0)$  vers n'importe quel autre état  $x(t_1)$

Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) :  $\text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n \Leftrightarrow \ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = 0$

Si  $\ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \neq 0$  les états  $x_i \neq 0$  non nuls correspondent aux états NC

# Etats commandables au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman :

- La paire  $(A,B)$  est complètement commandable (CC) s'il est possible en agissant sur  $u$  d'amener en un temps fini  $(t_1-t_0)$  n'importe quel état  $x(t_0)$  vers n'importe quel autre état  $x(t_1)$

Condition Nécessaire et Suffisante (CNS) :  $\text{rang}(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B) = n \Leftrightarrow \ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = 0$

Si  $\ker(B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B)^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T \neq 0$  les états  $x_i \neq 0$  non nuls correspondent aux états NC

# Application du critère de Kalman

Exercice

# Etats commandables au sens de Popov

## □ Critère de Popov:

◆  $\text{rang}(B, pI_n - A) = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \Re(p) \geq 0 \Leftrightarrow$  système stabilisable

$\forall p \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$  système commandable

$$\{p_1, p_2, \dots\} = \det(A - pI) = 0$$

◆ Les modes  $p$  qui font chuter le rang sont les modes non commandables

◆  $\ker(B - pI - A)^T = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^T$  les états  $x_i \neq 0$  correspondent aux états non commandables

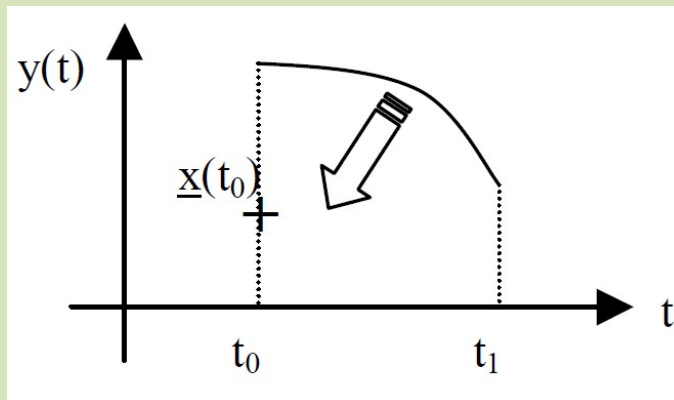
# Application du critère de Popov

Exercice

# Observabilité

## □ Définition

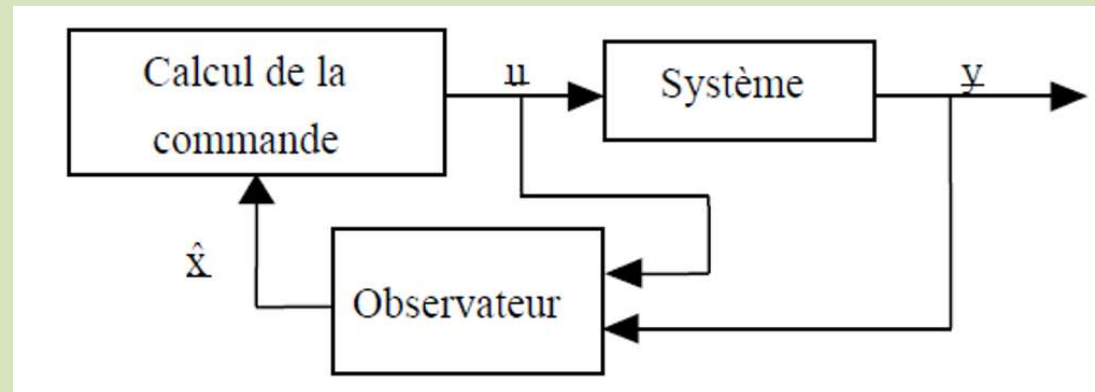
Un système est dit observable à l'instant  $t_0$ , si connaissant l'état du système  $x(t)$ , il est possible, à partir de l'observation de la sortie  $y(t)$  sur un intervalle de temps fini (de  $t_0$  à  $t$ ), de déterminer l'état  $x(t_0)$ .





# Pourquoi étudier les propriétés d'observabilité ?

- ❑ Réponse : s'assurer avant de déterminer l'estimer de l'état que les capteurs (mesures) sont bien placés sur le système pour que le système soit observable ou au-moins détectable et donc que l'observateur existe.



# Observabilité au sens de Kalman

## □ Critère de Kalman

- Un système linéaire stationnaire est observable vis à vis des états si et seulement si la matrice de d'observabilité est de plein rang :

$$O_{(A \ C)} = \left( C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T \right)^T$$

$$\text{rang} \left( C^T \ (CA)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T \right) = n$$



$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

# Application du critère de Kalman

- 2<sup>ème</sup> partie du TP pendule inverse

# Etats observable au sens de Popov

## □ Critère de Popov:

- ◆  $\text{rang} \begin{pmatrix} C \\ pI_n - A \end{pmatrix} = n \quad \forall p \in \mathbb{C}, \Re(p) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \text{système détectable}$
- ◆  $\forall p \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \text{système observable}$
- ◆ Les modes  $p$  qui font chuter le rang sont les modes non observables
- ◆  $\ker \begin{pmatrix} pI - A \\ C \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T$  les états  $x_i \neq 0$  correspondent aux états non observables

# Commande par retour d'état

Commande par retour d'état

Commande par retour d'état d'estimé

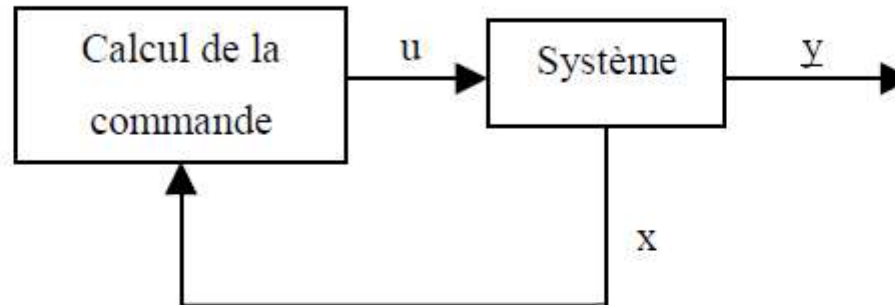
Régulateur / Observateur et RST

Synthèse

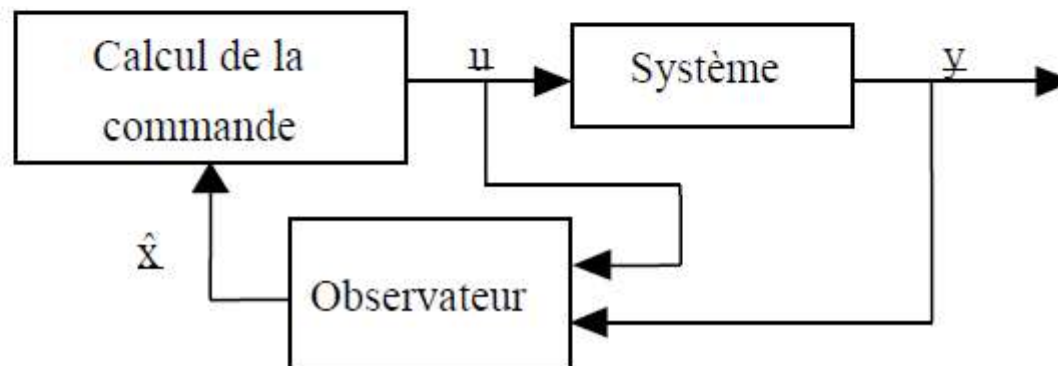


# Commande par retour d'état

- Implantation directe si :
  - l'état est accessible à la mesure



- Implantation indirecte si :
  - le système est détectable



# I) Commande par retour d'état

## □ Hypothèse

- $x$  est accessible à la mesure

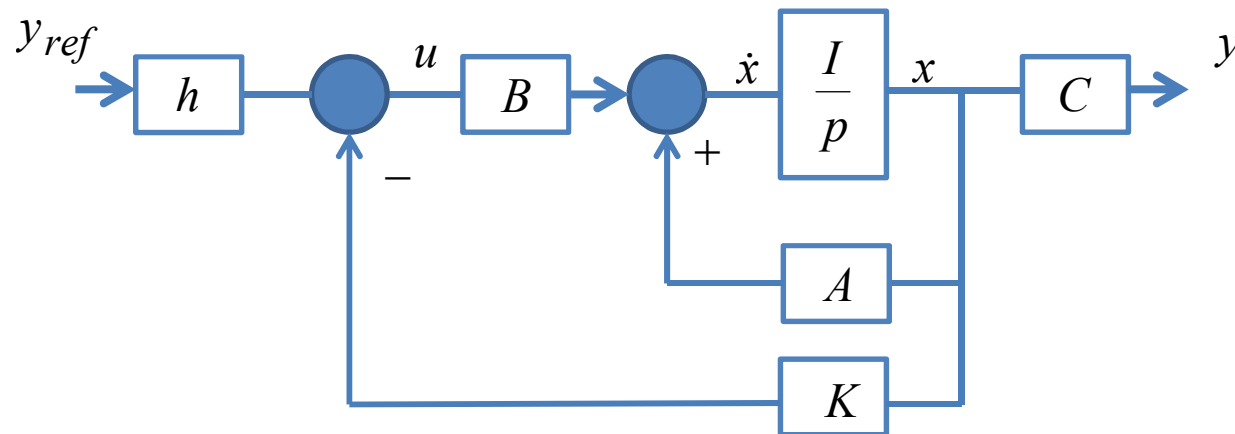
## □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

- commande  $u = -Kx + hy_{ref}$
- $K$  stabilise la BF
- $h$  est un préfiltre qui assure une erreur statique 0

# I) Commande par retour d'état

## □ Schéma bloc



## □ Boucle fermée

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK)x + Bhy_{ref} \\ y = Cx \end{cases}$$



# I) Commande par retour d'état

## □ Fonctions :

- Transfert de boucle (loop)

$$✓ \text{ loop} = K(pI - A)^{-1} B$$

- Sensibilité S

$$✓ S(p) = \frac{1}{1 + K(pI - A)^{-1} B}$$

- Sensibilité Complémentaire T

$$✓ T(p) = \frac{y(p)}{y_{ref}(p)} = C(pI - (A - BK))^{-1} B h$$

$$✓ T(p) = \frac{\text{transfert directe}}{1 + \text{loop}}$$

# I) Commande par retour d'état

## □ Exercice:

- On considère le système

$$G(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2}{p+1}$$

- ✓ donner sa représentation par variable de phase
- ✓ déterminer K tel que la dynamique de la BF soit fixée en -2
- ✓ déterminer h tel que  $y \rightarrow y_{ref}$
- ✓ donner le schéma bloc complet
- ✓ déduire les transferts : loop, S et T
- ✓ tracer les modules
- ✓ conclure.

## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

### □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}$$

- $d$  est une perturbation constante

### □ Objectif

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$$

### □ Solution

- Appliquer la synthèse de commande à partir du système augmenté d'un état intégrateur

$$\tilde{y}(t) = \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma$$

## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

### □ Système augmenté

$$\begin{cases} \dot{x}_a = A_a x_a + B_a u + E_a d + H_a y_{ref} \\ y = C_a \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} y_{ref} \\ y = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

- Où  $x_a = \begin{pmatrix} x \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

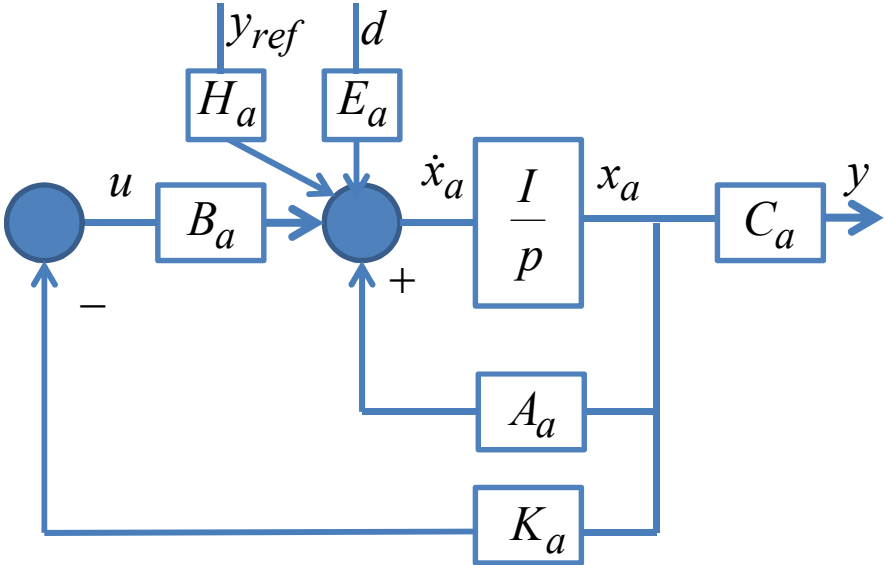
$$\tilde{y}(t) = \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma \Leftrightarrow \dot{\tilde{y}}(t) = y - y_{ref}$$

- Déduire  $A_a$ ,  $B_a$ ,  $E_a$ ,  $H_a$  et  $C_a$
- Donner les propriétés de commandabilité
- Commande avec effet intégral

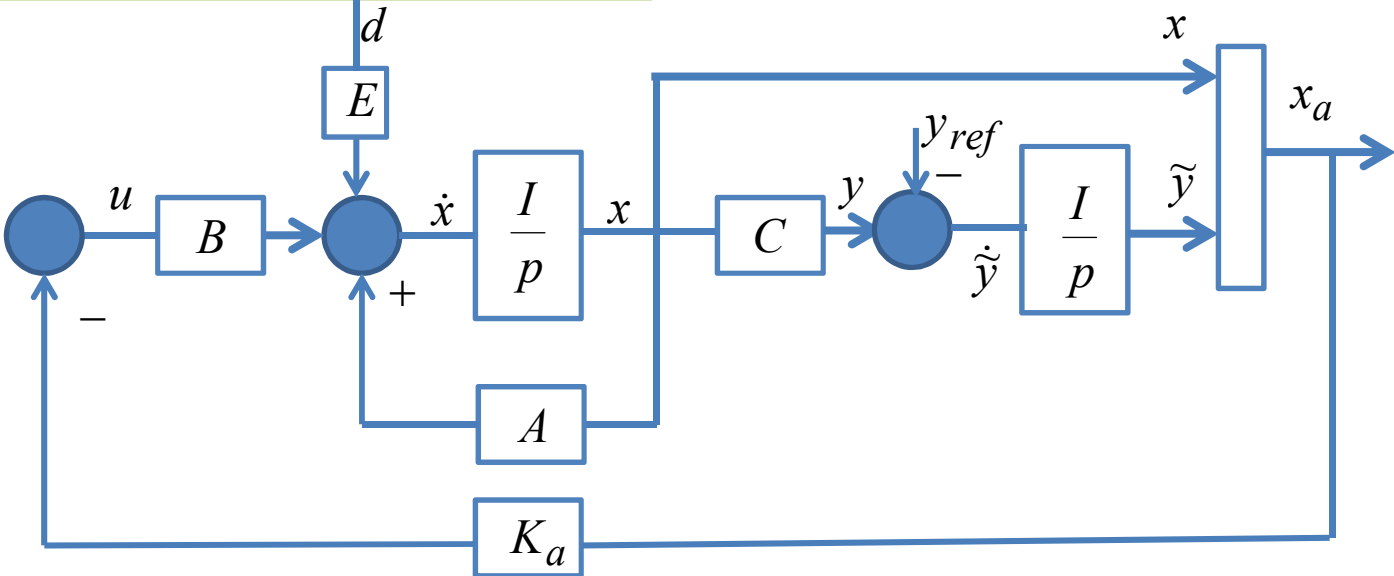
$$u = -K_a x_a = -\begin{bmatrix} K_x & K_{\tilde{y}} \end{bmatrix} x_a = -K_x x - K_{\tilde{y}} \times \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma$$

## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

☐ Schéma bloc compact



☐ Schéma bloc équivalent détaillé



## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

□ Boucle fermée :

$$\begin{cases} \dot{x}_a = (A_a - B_a K_a)x_a + E_a d + H_a y_{ref} \\ y = C_a x \end{cases}$$

### □ Fonctions

- Transfert de boucle (loop)

✓  $loop = K_a (pI - A_a)^{-1} B_a$

- Sensibilité perturbation

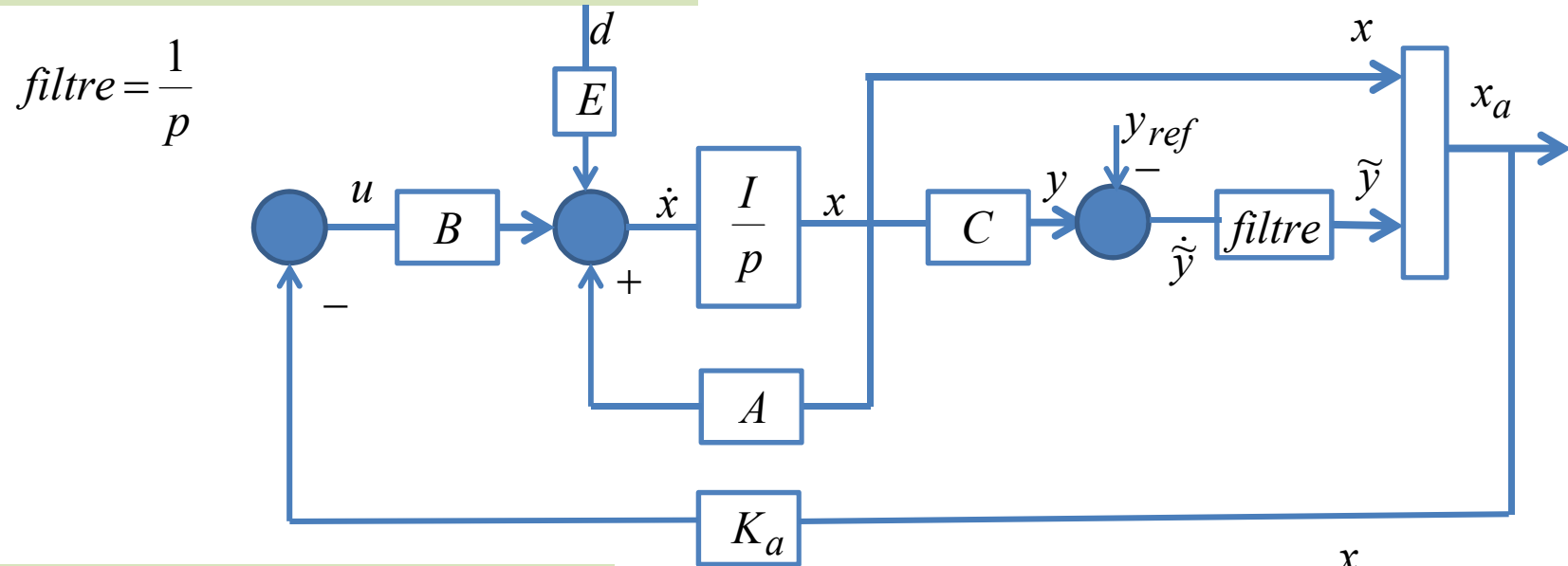
✓  $S_{yd}(p) = \frac{y(p)}{d(p)} = C_a (pI - (A_a - B_a K_a))^{-1} E_a$

- Sensibilité Complémentaire T

✓  $T_{yy_{ref}}(p) = \frac{y(p)}{y_{ref}(p)} = C_a (pI - (A_a - B_a K_a))^{-1} H_a$

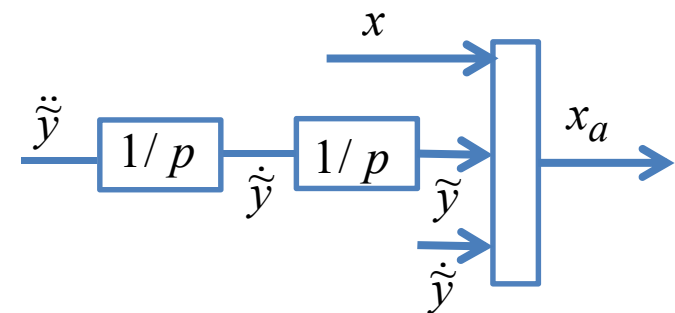
## II) Commande par retour d'état augmenté pour tenir compte de la nature de la perturbation

- ❑ Cas 1 : Perturbation d de type constante



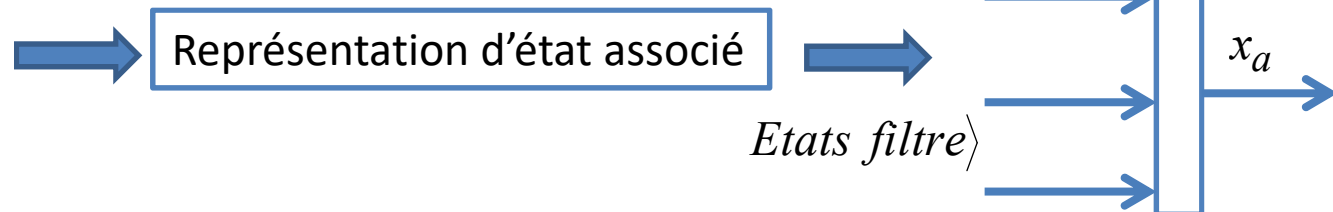
- ❑ Cas 2 : Perturbation d de type rampe

$filtre = \frac{1}{p^2}$



- ❑ Cas 3 : Perturbation d de type sinusoidale de pulsation w

$filtre = \frac{1}{p^2 + w^2}$



## II) Commande par retour d'état avec effet intégral

### □ Exercice:

- On considère le système 
$$\begin{cases} \dot{x} = -x + u + d \\ y = x \end{cases}$$

- Objectif

- ✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

- Solution

- ✓ Donner le système augmenté
  - ✓ Déterminer  $K_a$  tel que la dynamique de la BF soit fixée en -2
  - ✓ Donner le schéma bloc complet
  - ✓ Déduire les transferts : loop, S et T
  - ✓ Tracer les modules
  - ✓ Conclure.

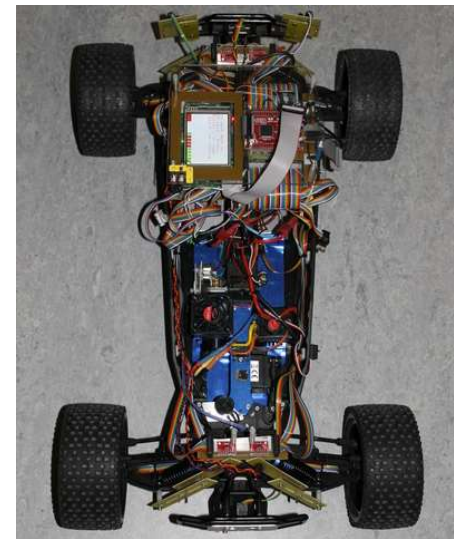


# Commande par retour d'état

Commande par retour d'état d'estimé

Régulateur / Observateur et RST

Synthèse



## III) Commande par retour d'état estimé

### □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

- Hypothèse :  $x$  n'est pas accessible à la mesure
- Objectif :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref}$

### □ Solution

- Commande :  $u = -K\hat{x} + hy_{ref}$
- Observateur :  $\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y - C\hat{x})}_{\text{terme de correction}}$

## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral. Cas continu :

### □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}$$

- Hypothèse :  $x$  n'est pas accessible à la mesure
- Objectif :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

### □ Solution

- Commande Reg/obs :  $u = -K_a \hat{x}_a$ 
  - ✓ Etat augmenté :  $\hat{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}(t) = \int_0^t (y(\gamma) - y_{ref}) d\gamma$
  - ✓ Observateur :  $\underbrace{\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y - C\hat{x})}_{\text{terme de correction}}$

## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ A) Synthèse de l'Observateur

$$\dot{\hat{x}} = \underbrace{A\hat{x} + Bu}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y - C\hat{x})}_{\text{terme de correction}}$$

### □ Objectif 1 : Construire l'observateur

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) \rightarrow x(t) \Big|_{d=0} \quad \forall x_0, \hat{x}_0, u \text{ et } y$$

- Etude de la dynamique d'erreur d'estimation d'état

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \Big|_{d=0} \quad \text{où} \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

- Le gain L est déterminé pour assurer la vitesse de convergence souhaitée.

✓ Placement de pôles

✓  $p_i$  pôles désirés de l'observateur

$$|pI - (A - LC)| = \prod_{i=1}^{\dim(x)} (p - p_i)$$

## IV) Commande par retour d'état estimer avec effet intégral

### □ B) Synthèse de la commande

- Objectif 2 :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref}(t) \quad \forall d = cte$

- Solution : Trouver  $K_a$  tel que

$$\checkmark \quad |pI - (A_a - B_a K_a)| = \prod_{i=1}^{\dim(x) + \dim(y)} (p - p_i)$$

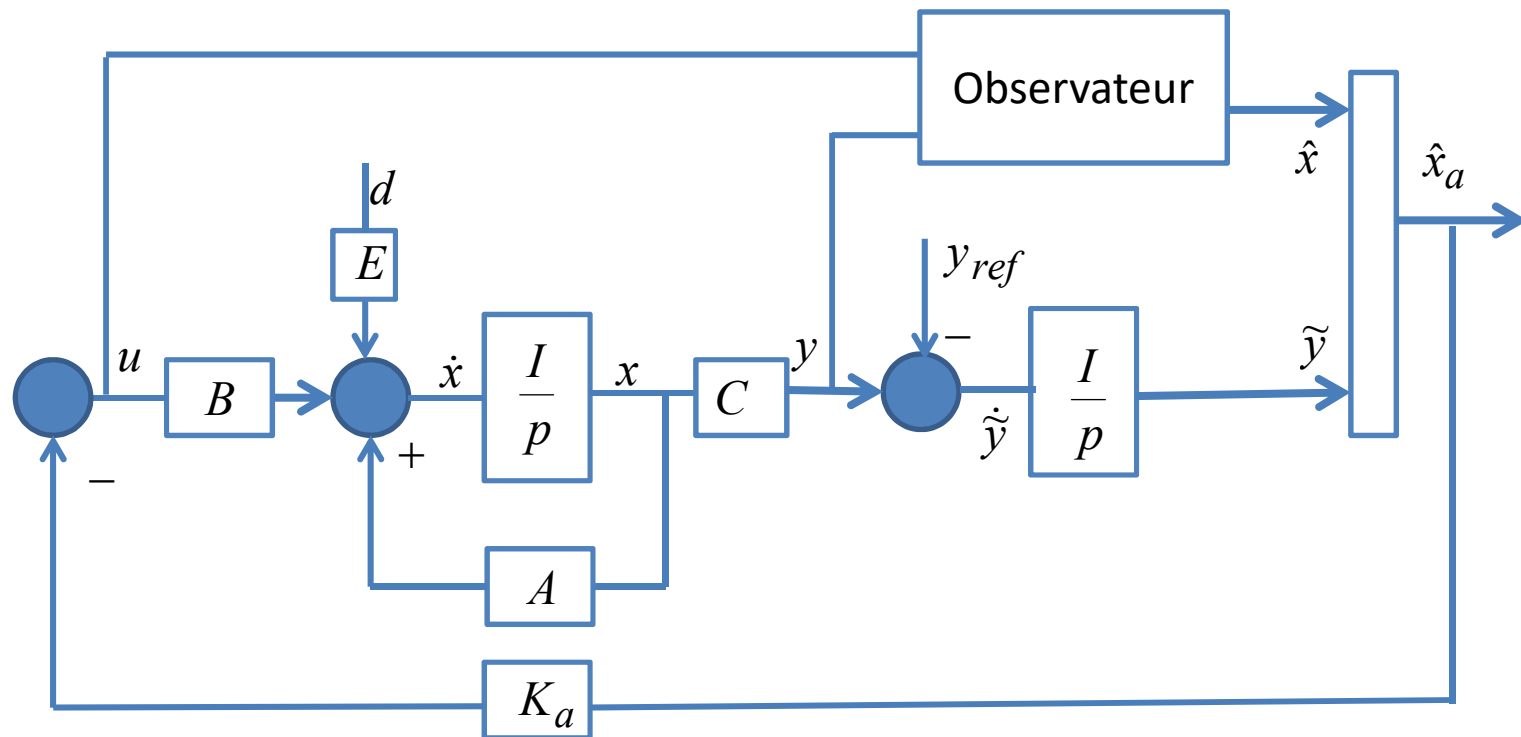
- On montre d'après le système matriciel ci-dessous que  $K_a$  et  $L$  peuvent être déterminés indépendamment :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} y_{ref}$$

- Complétez le système ci-dessus et expliquer pourquoi cette indépendance est respectée.

## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ Schéma bloc compact



## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ Boucle fermée :

- Compléter le système

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} d + \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix} y_{ref} \\ y = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_a \\ e \end{pmatrix} \end{cases}$$

### □ Déduire les fonctions

- Sensibilité Sortie/Perturbation

✓  $S_{yd}(p) = \frac{y(p)}{d(p)}$

- Sensibilité Complémentaire T

✓  $T_{yy_{ref}}(p) = \frac{y(p)}{y_{ref}(p)}$

## IV) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral

### □ Exercice:

- On considère le système 
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d \\ y = (1 \ 0)x \end{cases}$$

- Objectif

- ✓  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

- Solution

- ✓ Donner le système augmenté
  - ✓ Déterminer Ka tel que la dynamique de la BF soit fixée en -1
    - Pourquoi on ne peut pas fixer l'ensemble de la dynamique en -2
  - ✓ Déterminer L tel que la dynamique de l'Obs soit fixée en -2
  - ✓ Déduire les transferts : S et T
  - ✓ Tracer les modules
  - ✓ Conclure.



## V) Passage du Régulateur/Observateur au RST

### □ Système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ed \\ y = Cx \end{cases}$$

- Objectif :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

### □ Solution

- Commande Reg/Obs:
  - ✓ Etat augmenté avec effet intégral :  $u = -K_a \hat{x}_a$
- Commande RST:
  - ✓ Fonctions de transfert  $u = \frac{T}{S} y_{ref} - \frac{R}{S} y$

## V) Passage du Régulateur/Observateur au RST

□ Solution : Poser la représentation associée

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\hat{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} y_{ref} \\ u = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} \end{cases}$$

□ Complétez les éléments ci-dessus et déduire à partir de cette représentation les polynômes R, S et T :

$$\frac{T}{S} = \frac{u}{y_{ref}} \Big|_{y=0} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

$$-\frac{R}{S} = \frac{u}{y} \Big|_{y_{ref}=0} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

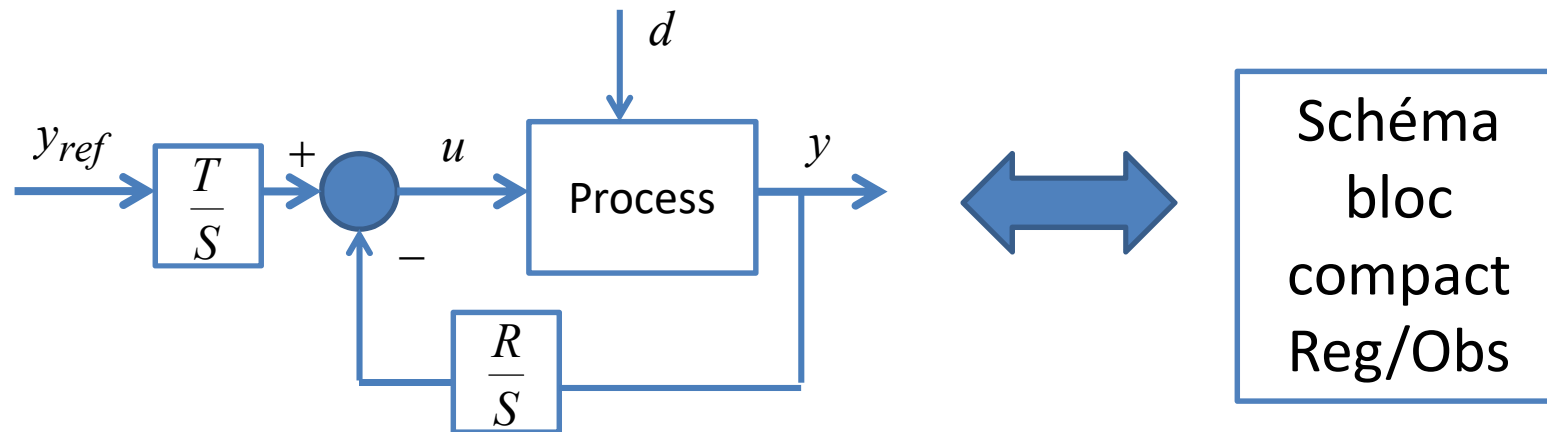
# Commande par retour d'état

Régulateur / Observateur et RST

Synthèse

## V) Passage du Régulateur/Observateur au RST

### □ Schéma bloc RST



### □ Retrouvez à partir du RST les fonctions S et T du Reg/Obs

## VI) Commande par retour d'état estimé avec effet intégral. Cas discret :

□ Système 
$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + Ed_k \\ y_k = Cx_k \end{cases}$$

- Hypothèse :  $x$  n'est pas accessible à la mesure
- Objectif :  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k \rightarrow y_{ref} \quad \forall d \text{ cte}$

### □ Solution

- Commande Reg/obs :  $u_k = -K_a \hat{x}_{a_k}$ 
  - ✓ Etat augmenté :  $\hat{x}_a = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix}, \quad \tilde{y}_{k+1} = \tilde{y}_k + y_k - y_{ref_k}$
  - ✓ Observateur :  $\hat{x}_{k+1} = \underbrace{A\hat{x}_k + Bu_k}_{\text{Modèle mathématique}} + \underbrace{L}_{\text{gain}} \underbrace{(y_k - C\hat{x}_k)}_{\text{terme de correction}}$
  - ✓ La synthèse reste identique au cas continu.

# Synthèse

- Voir les 2 synthèses complètes élaborées en TP
  - Pendule Inverse
    - ✓ Modélisation NL, linéarisé et commande
  - Moteur à courant continu
    - ✓ Commande Reg/Obs et implémentation RST

