

# Introduction aux systèmes asservis

## Systèmes de régulation

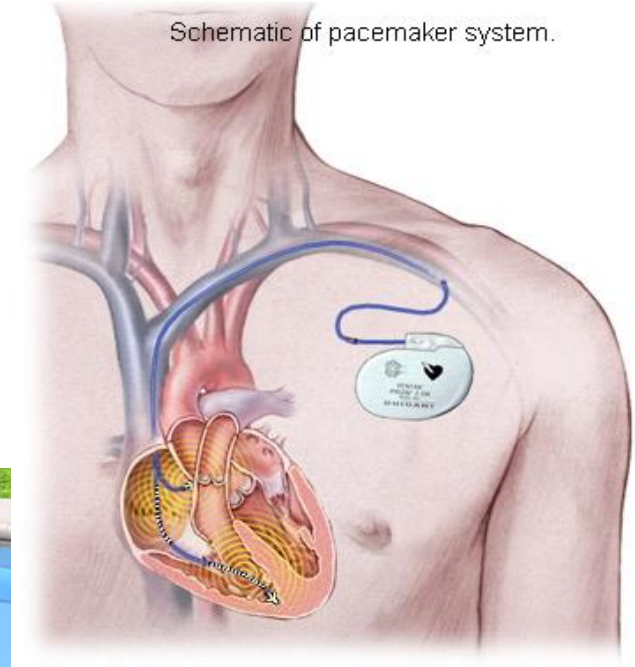


Clim automatique



Régulateur niveau  
piscine

## Consigne constante



Pacemaker

# Types de systèmes asservis:

## Systemes suiveurs



Missile à tête chercheuse



Suiveur solaire

## Consigne variable

# Qui suis je?



## Damien Koenig :

- ✓ 51 ans
- ✓ Enseignant à l'Esisar
- ✓ Recherche au Gipsa-lab UMR CNRS

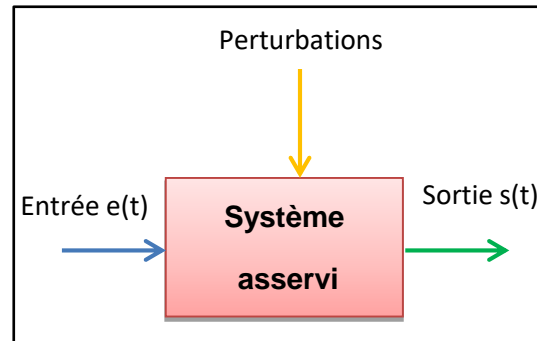
✓ Site web à votre disposition

✓ <http://koenig-damien.jimdo.com/enseignement>

# But de l'Automatique



Pilote automatique



Commandé en continu

La sortie doit correspondre au plus près à l'entrée (boucle retour avec capteur)

→ { stabilité  
précision  
rapidité  
amortissement ...

# Quelques applications



Automobile : ABS/ESP/ASR....



*UAV Dassault Aviation "petit duc"*



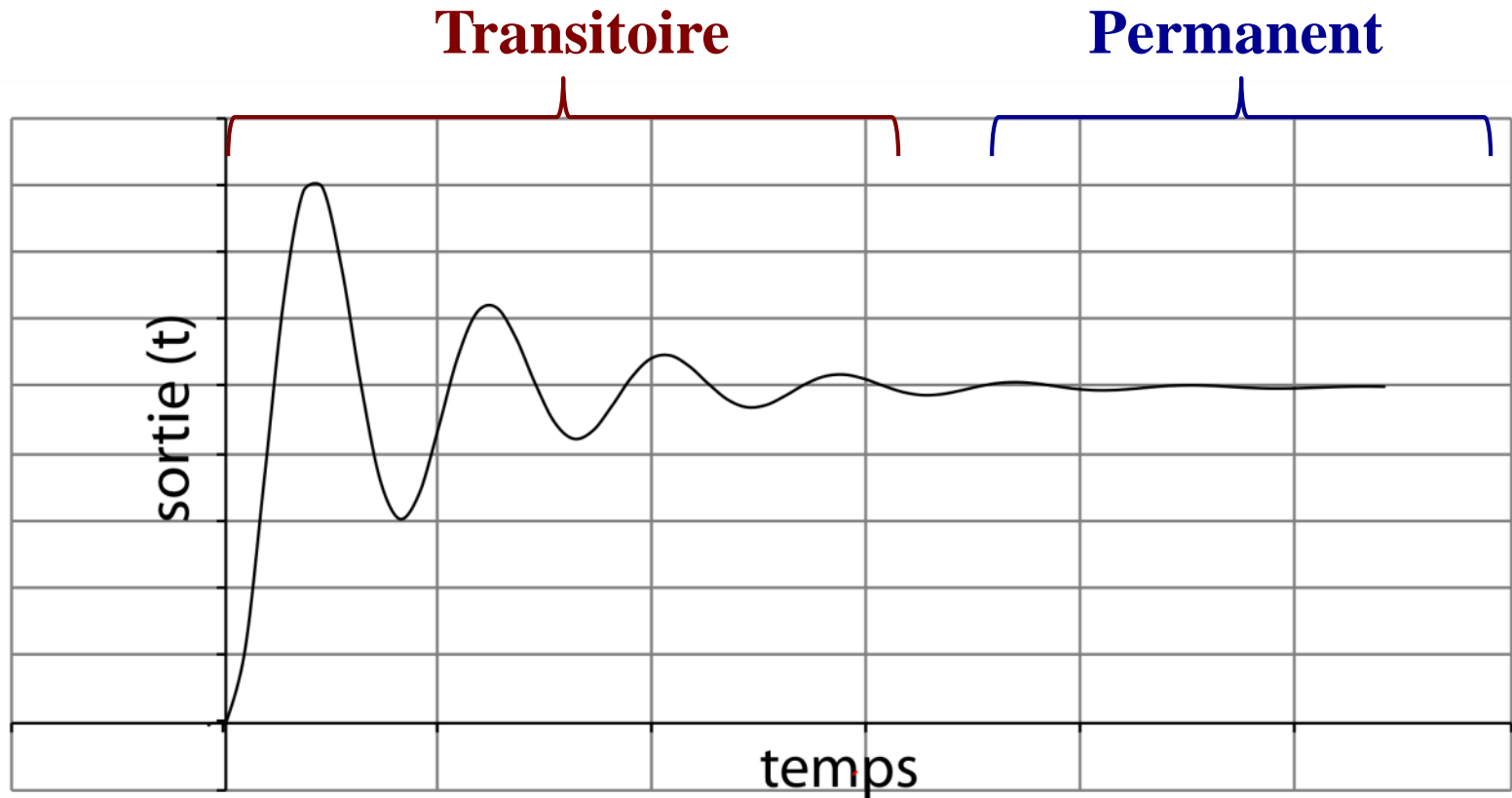
*MP 89 CA "METEOR"*



installation d'épuration de gaz  
de haut-fourneau

# Critères de performance

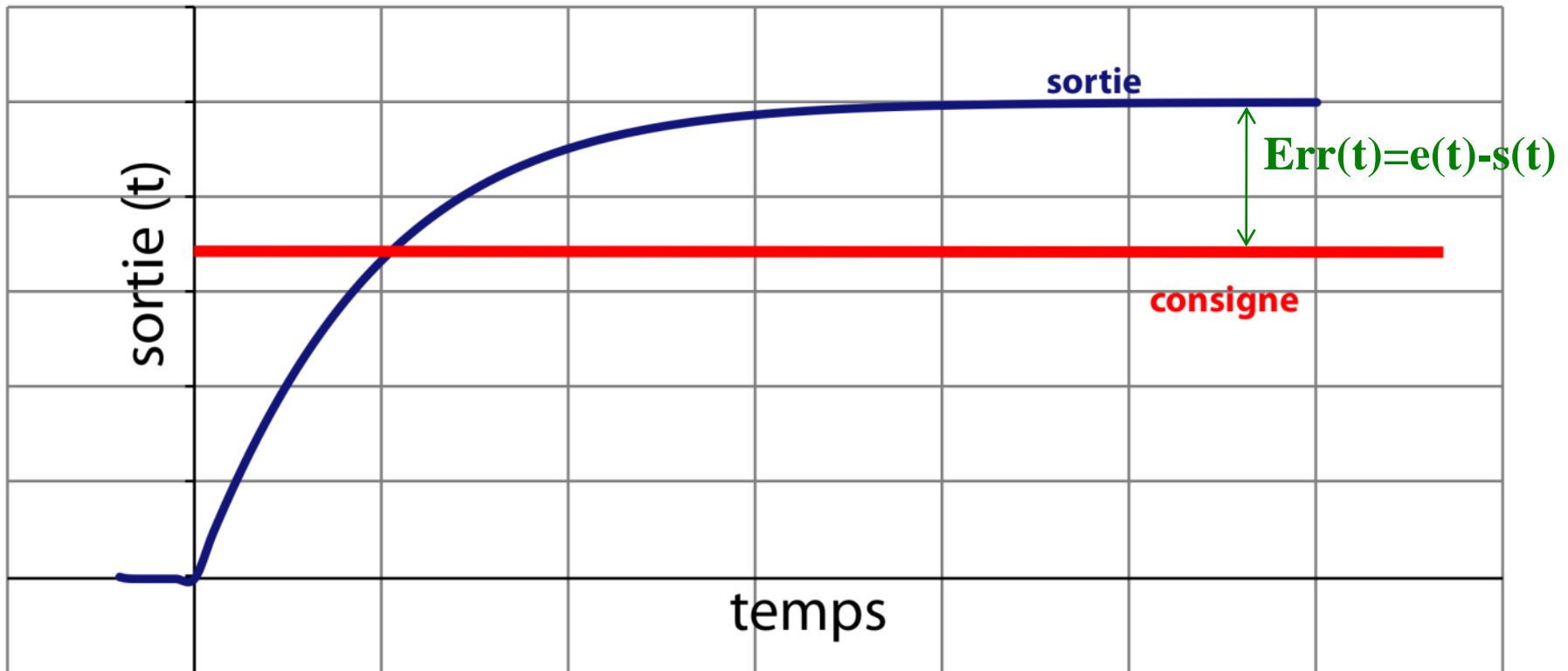
Distinction des régimes



# Critères de performance

## Régime permanent

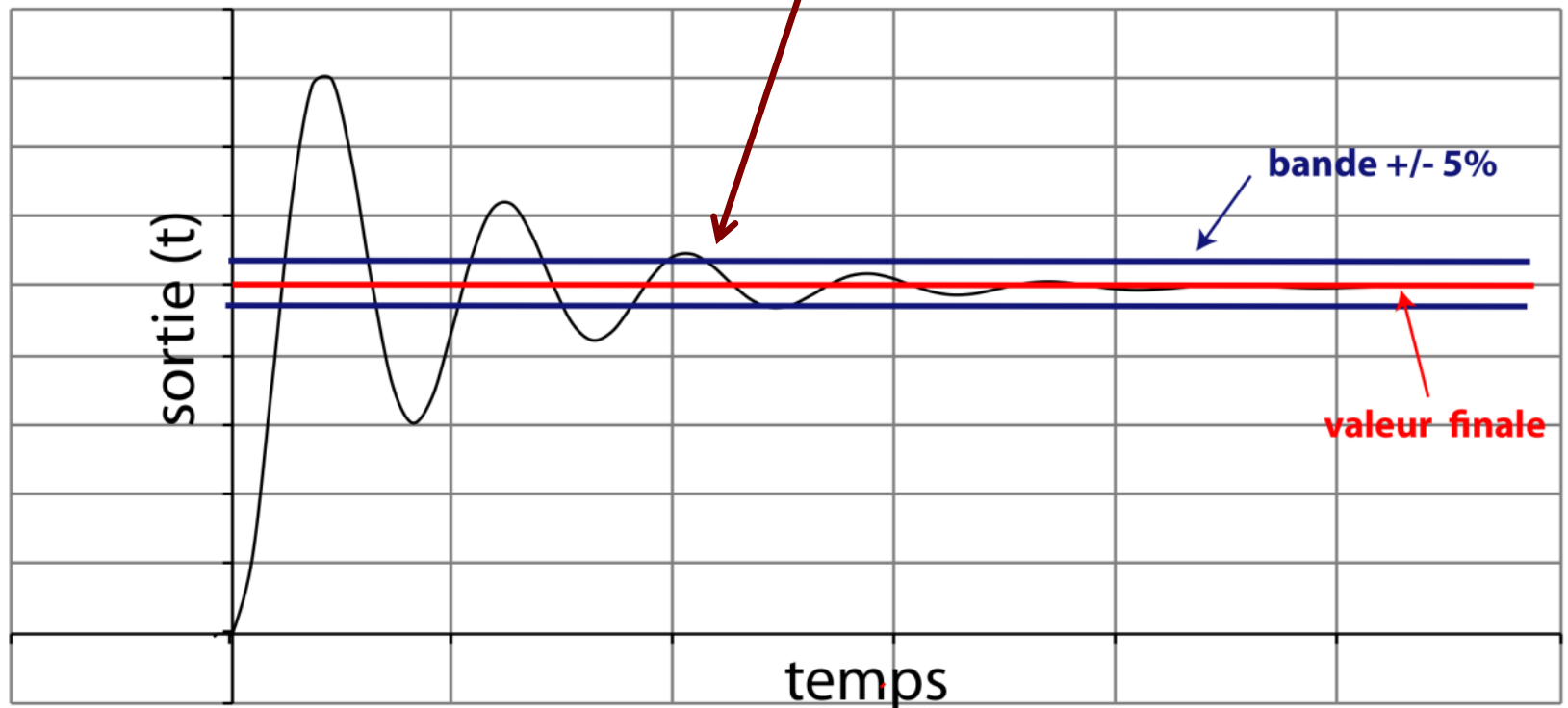
**Précision** : écart entre les valeurs souhaitée (consigne) et obtenue (sortie)



# Critères de performance

## Régime transitoire

**Rapidité** : caractérisée par le temps mis pour arriver en régime permanent

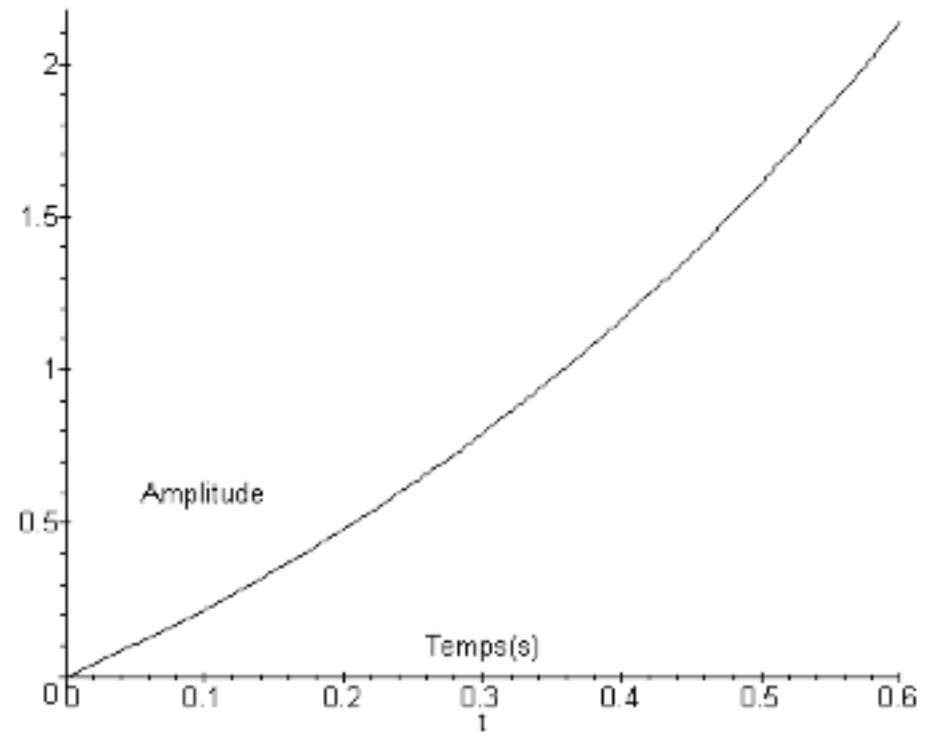
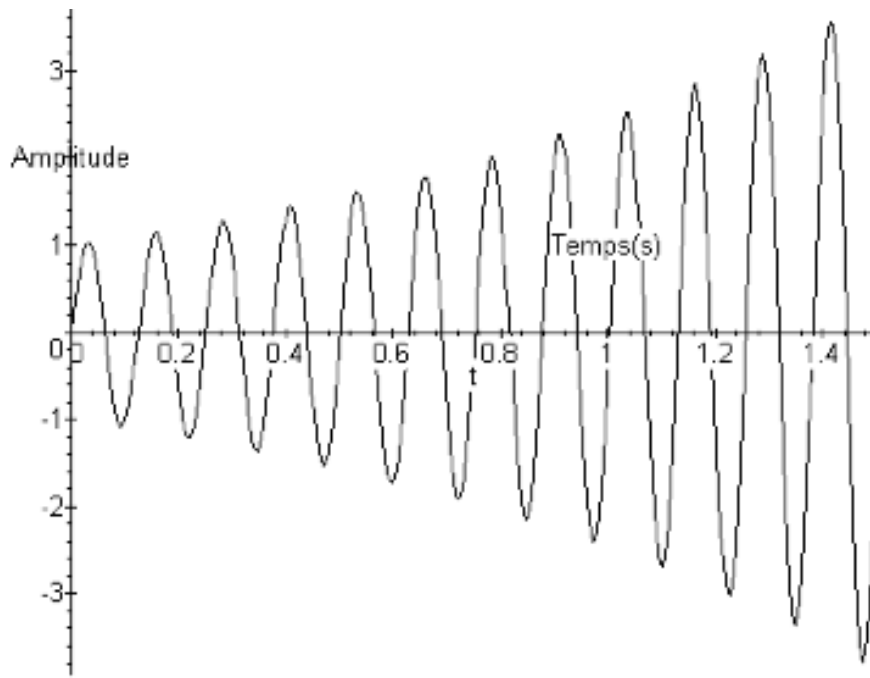




# Critères de performance

## Régime permanent

**Stabilité** : stable si la sortie est **bornée**, pour une entrée bornée

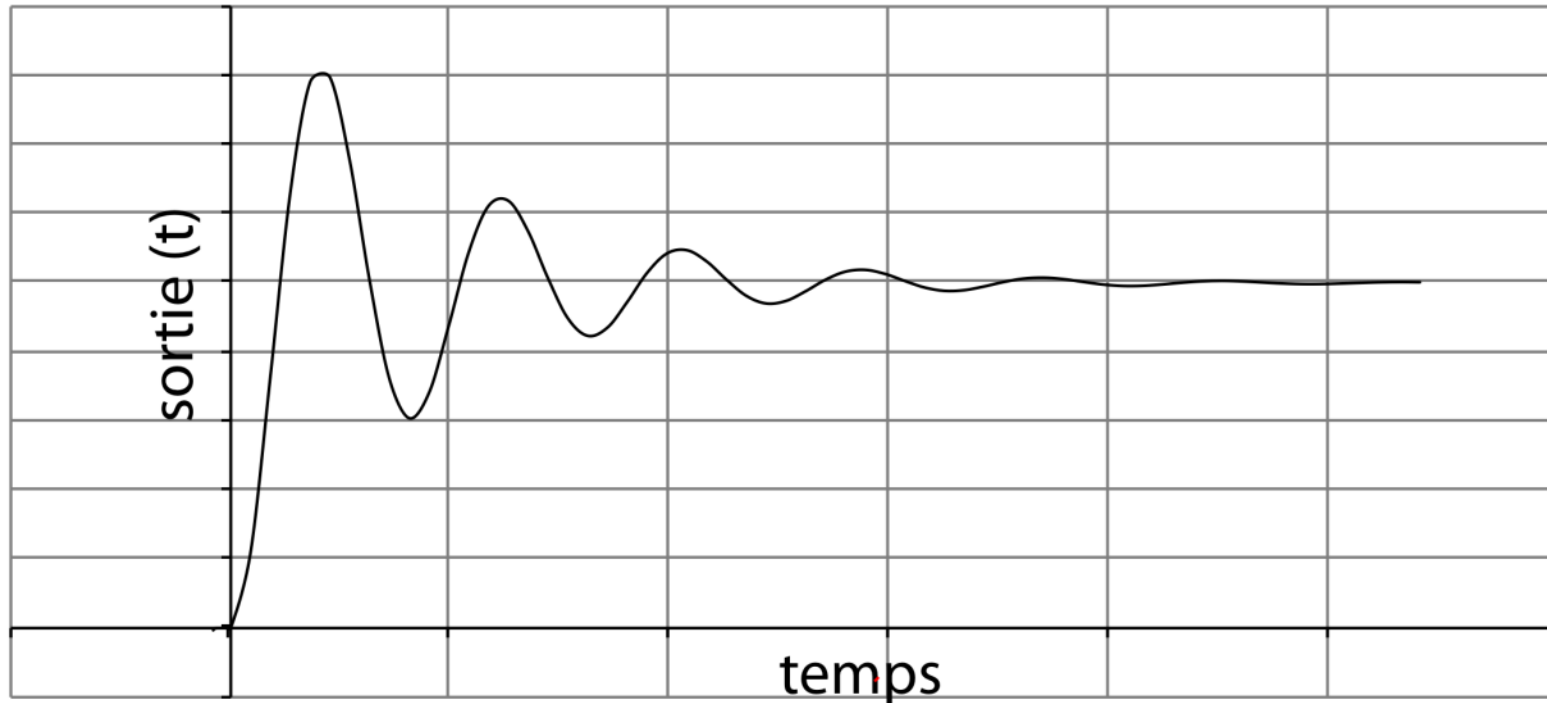


Instable

# Critères de performance

## Régime permanent

**Stabilité** : stable si la sortie est **bornée**, pour une entrée bornée

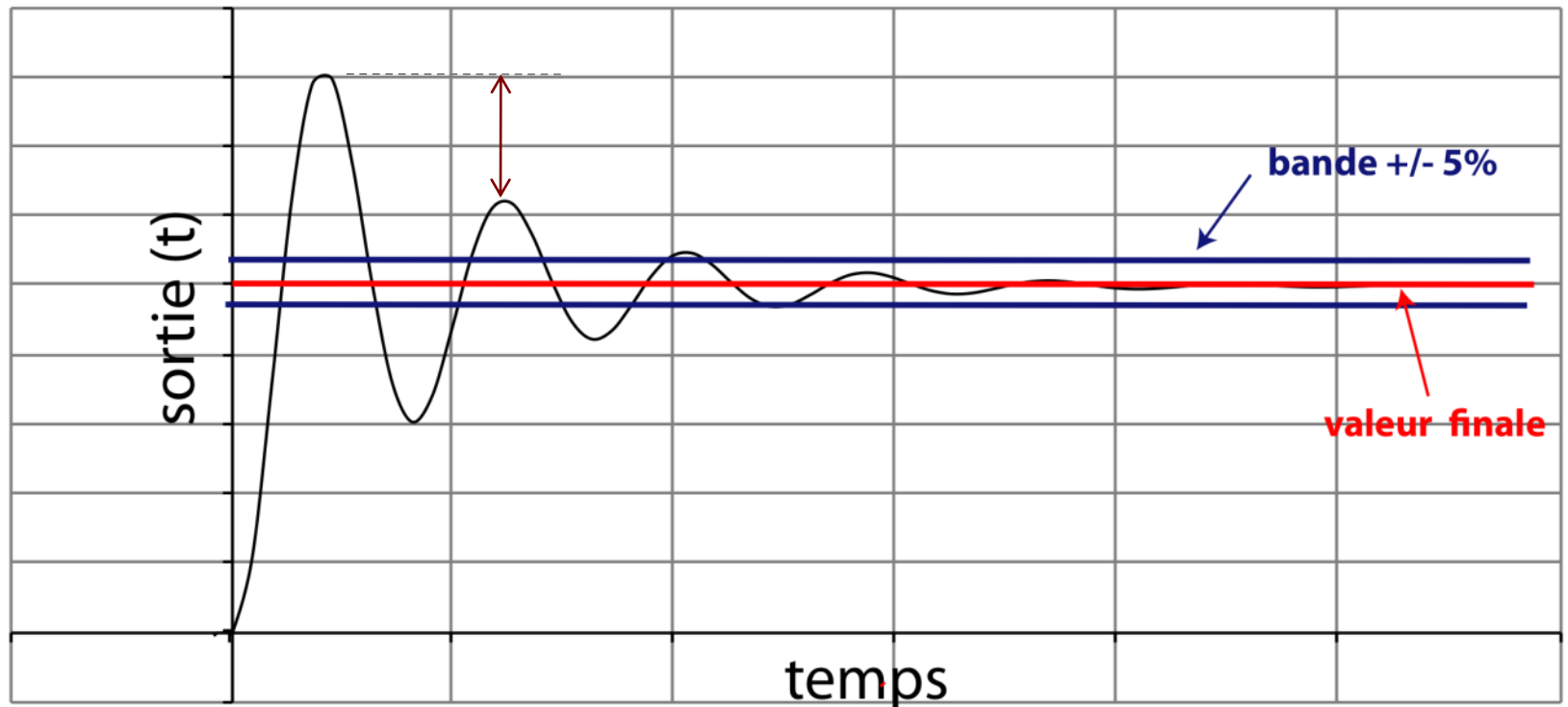


Stable

# Critères de performance

## Régime transitoire

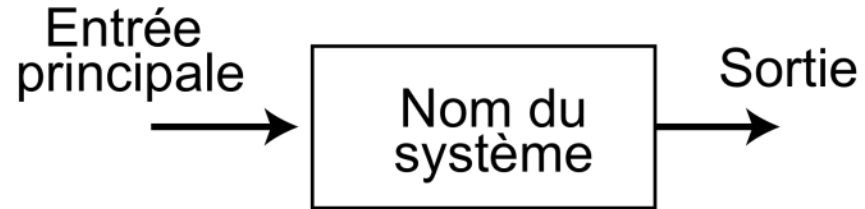
**Amortissement** : caractérisé par la diminution de l'amplitude des oscillations



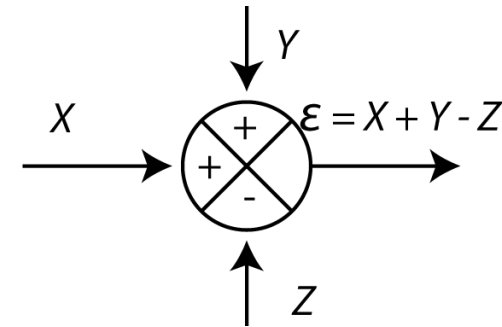
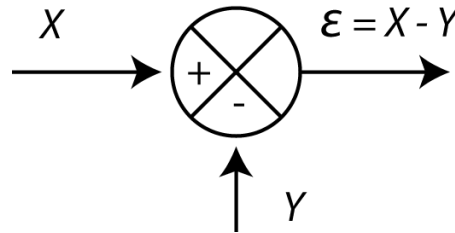
# Schématisation par schéma-blocs

Trois éléments de base:

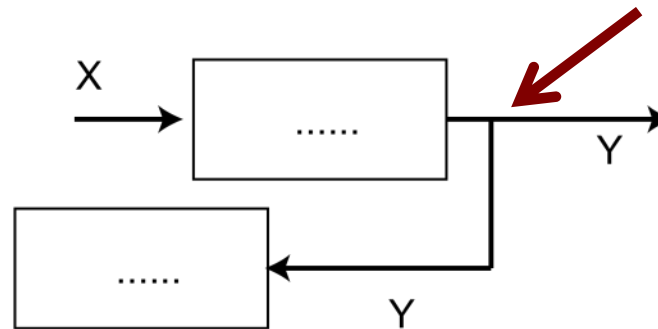
**Bloc**



**Comparateur**  
(sommateur)



**Point de**  
**prélèvement**




# Modélisation par équations différentielles

## Modèle général

Les SLCI étudiés seront représentables la plupart du temps par **des équations différentielles à coefficients constants liant la grandeur d'entrée  $e(t)$  à la grandeur de sortie  $s(t)$ .**


*Ordre du système*


$$a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 e(t)$$

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du premier ordre

*constante de temps du système (s)*

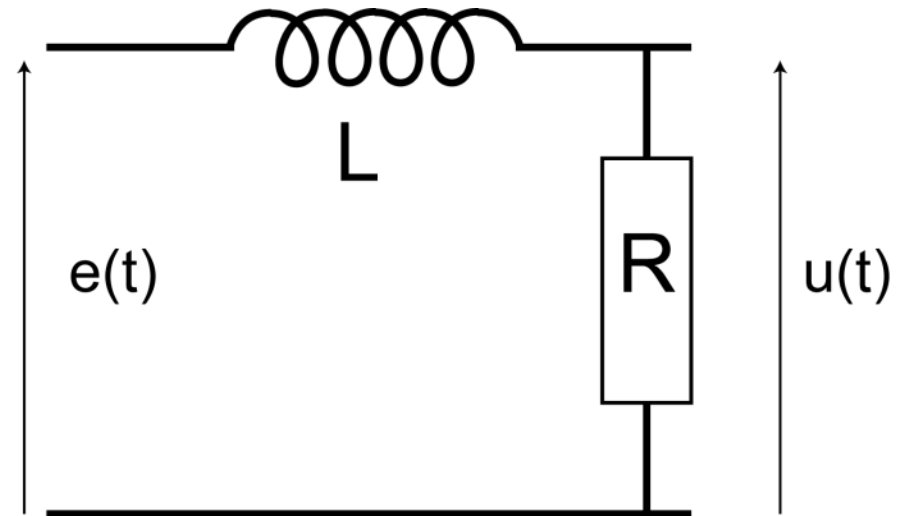
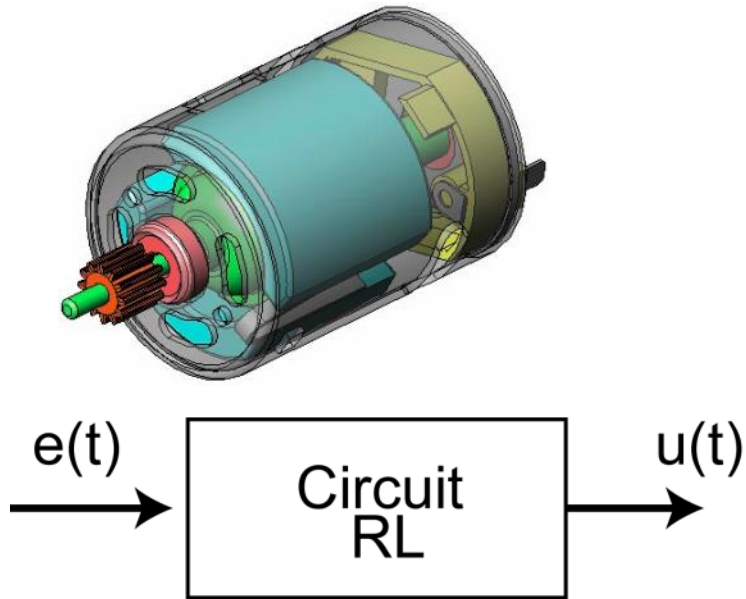

$$\tau \frac{d s(t)}{d t} + s(t) = K e(t)$$



*Gain du système [s]/[e]*

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du premier ordre



$$e(t) = L \frac{d i(t)}{dt} + R i(t)$$

$$u(t) = R i(t)$$

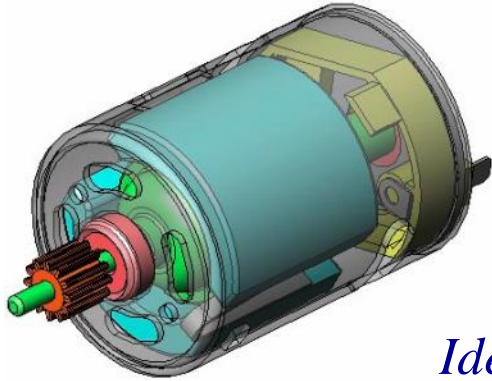


$$\frac{L}{R} \frac{d u(t)}{dt} + u(t) = e(t)$$

*Exemple : circuit RL (moteur électrique)*

# Modélisation par équations différentielles

## Systèmes du premier ordre



$$\frac{L}{R} \frac{d u(t)}{d t} + u(t) = e(t)$$

*Identification avec*  $\tau \frac{d s(t)}{d t} + s(t) = K e(t)$

$$\Rightarrow \tau = \frac{L}{R} \quad K = 1$$

*Exemple : circuit RL (moteur électrique)*



# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du deuxième ordre

*Pulsation propre  
Non amortie (rad/s)*

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

*Coefficient d'amortissement  
(rad/s)*

*Gain du système [s]/[e]*

# Modélisation par équations différentielles

Systemes du deuxième ordre

*Amortisseur*

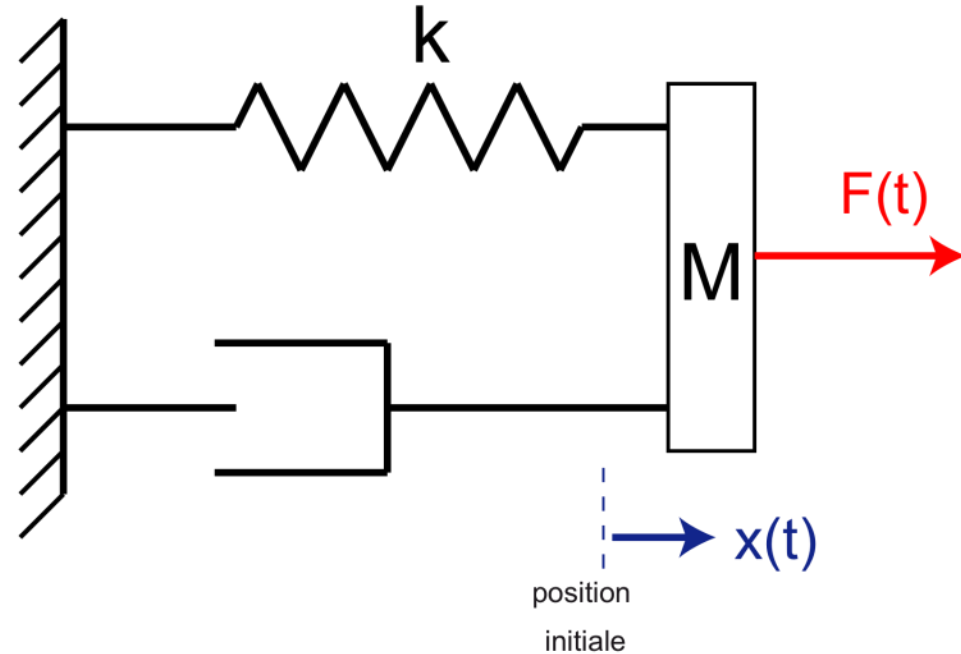
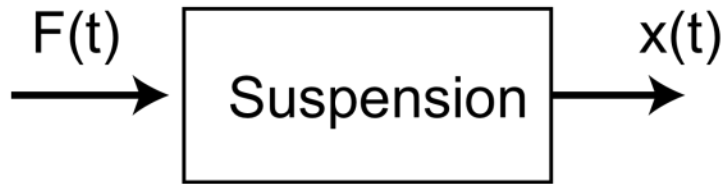
*Ressort*



*Exemple : Suspension*

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du deuxième ordre



*Exemple : Suspension*

# Modélisation par équations différentielles

## Systemes du deuxième ordre



Le Principe Fondamental de la Dynamique appliqué à la masse donne l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{M} x(t) = \frac{1}{M} F(t)$$

*Identification avec*

$$\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2z\omega_0 \frac{ds(t)}{dt} + \omega_0^2 s(t) = K\omega_0^2 e(t)$$

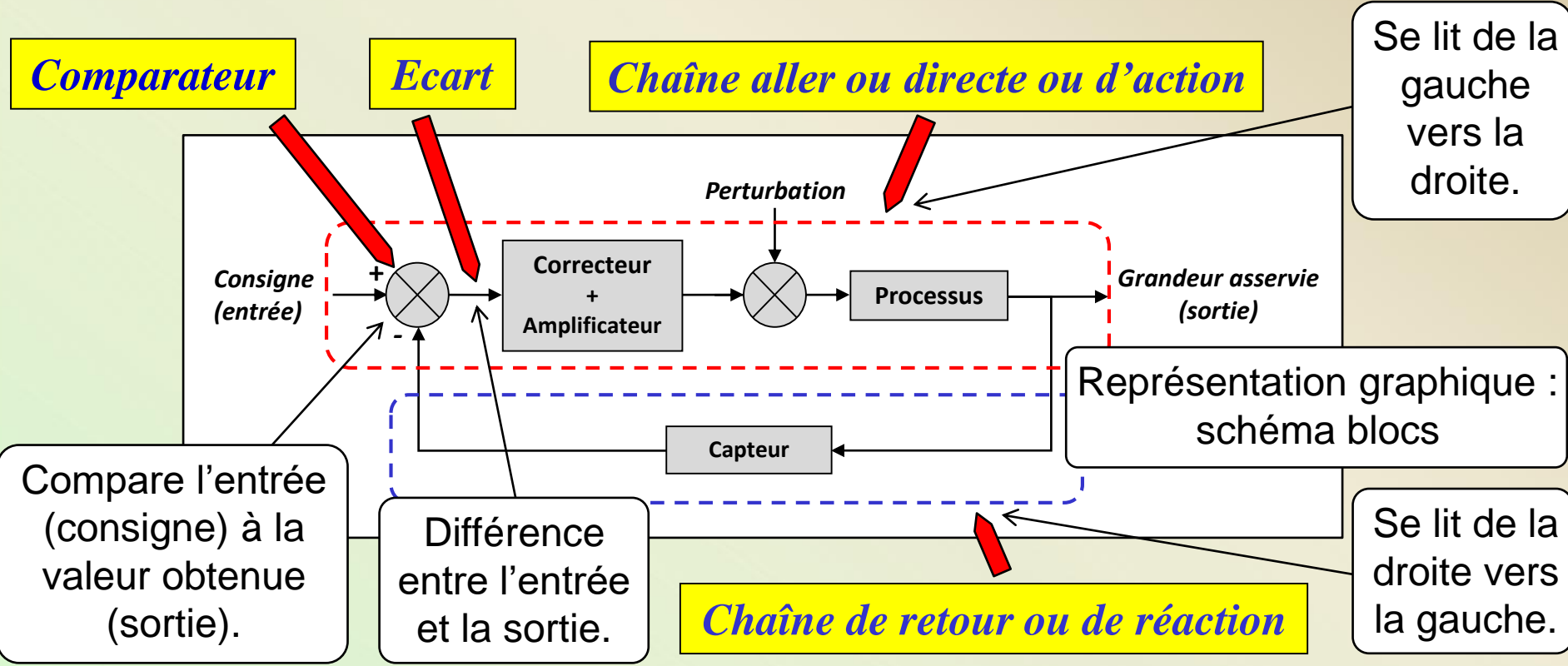
$$K = \frac{1}{k} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M} \quad \text{et} \quad z = \frac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{Mk}}$$

*Exemple : Suspension*

# 2) Les systèmes asservis

Un système asservi comporte une boucle retour (capteur) associée à un comparateur

→ *rétroaction de la sortie sur l'entrée (bouclage)*

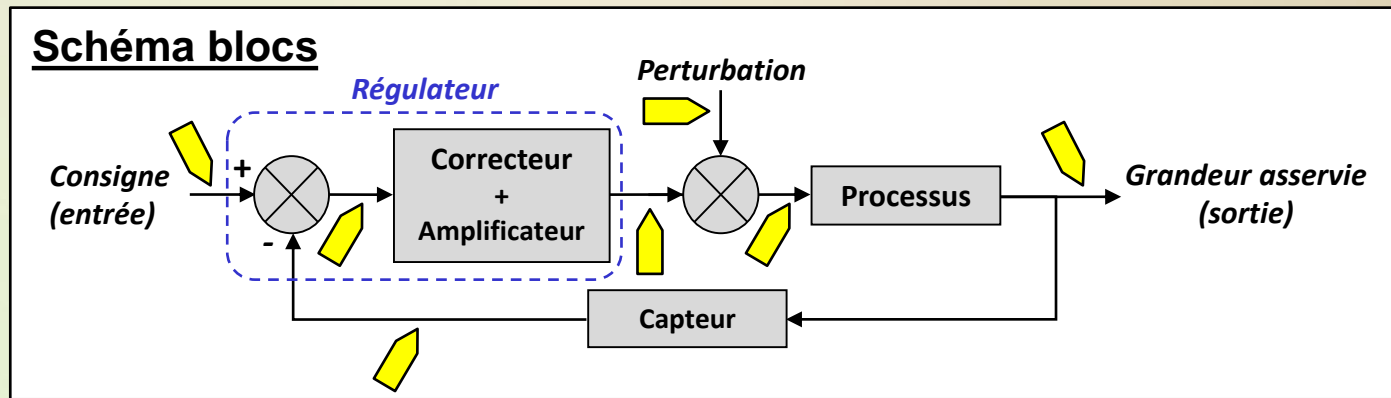


Régulation : sortie reste à une valeur fixée (température four, vitesse moteur...).

Asservissement : la sortie suit une loi fixée (bras de robot...).

Trajectoire

# Systeme asservi



Grandeur physique  
pouvant évoluer  
avec le temps.

**Variable**

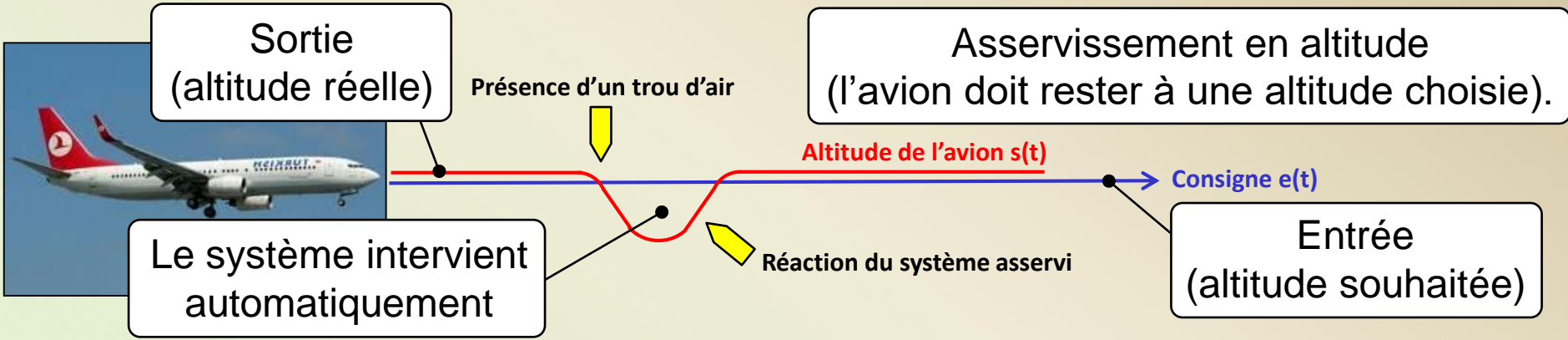
Tension électrique, vitesse, température, angle...

- ▶ **Entrée** : réglable, indépendante du système.
- ▶ **Perturbation** : entrée sur laquelle on ne peut agir.
- ▶ **Sortie** : dépendante du système.
- ▶ **Interne** : dépendante du système.

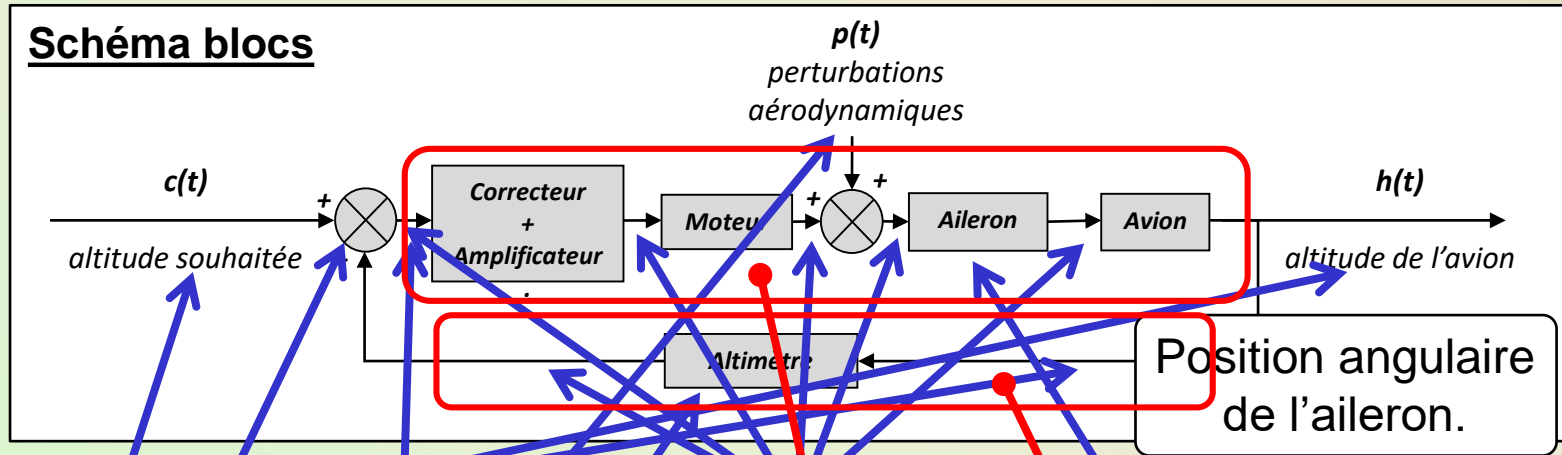
**Paramètre**

→ Grandeur physique indépendante du temps.

# Exemple d'un pilote automatique d'avion



## Schéma blocs



Entrée, sortie, perturbation, variable interne, paramètre, comparateur, écart, capteur, chaîne aller, chaîne retour.

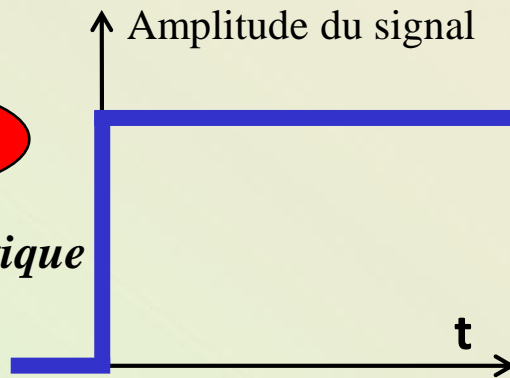
Notion de stabilité, précision, rapidité, amortissement.

Critères de qualité de l'asservissement (caractéristiques)

# Signaux d'entrée

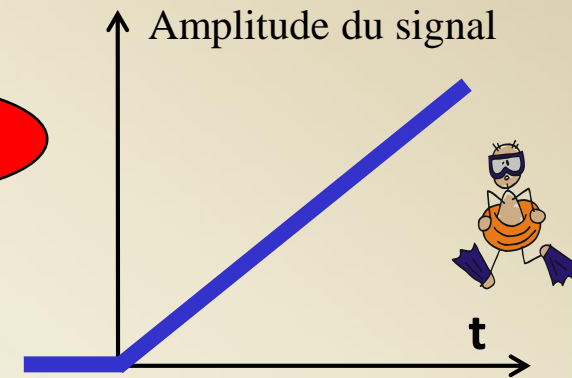
*L'étude d'un système asservi se fait à travers le comportement du système en réponse à des signaux d'entrée particuliers*

**échelon**



→ { *Précision statique*  
*Rapidité*

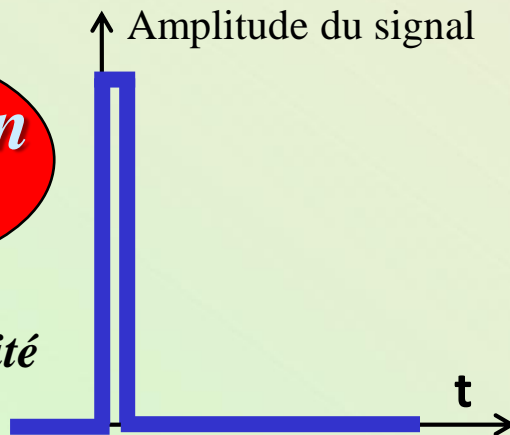
**rampe**



→ *Précision dynamique*

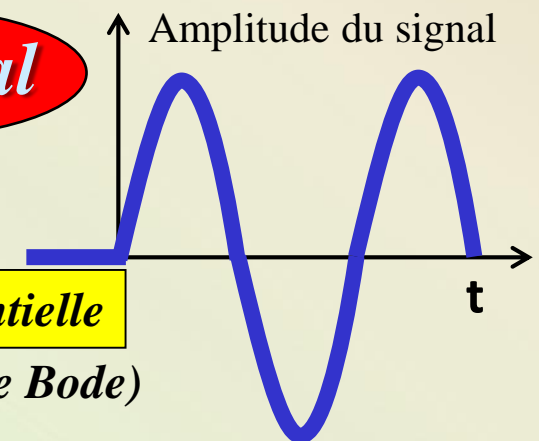


**impulsion (Dirac)**



→ *Etude stabilité*

**sinusoïdal**



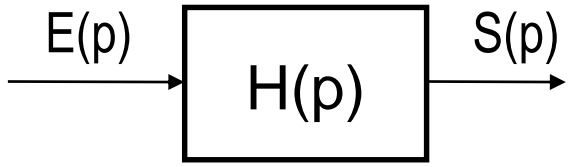
→ *Stabilité*

**étude fréquentielle**  
(diagrammes de Bode)



# Analyse temporelle d'un 1<sup>er</sup> ordre

Systeme du 1<sup>er</sup> ordre (forme canonique) :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$


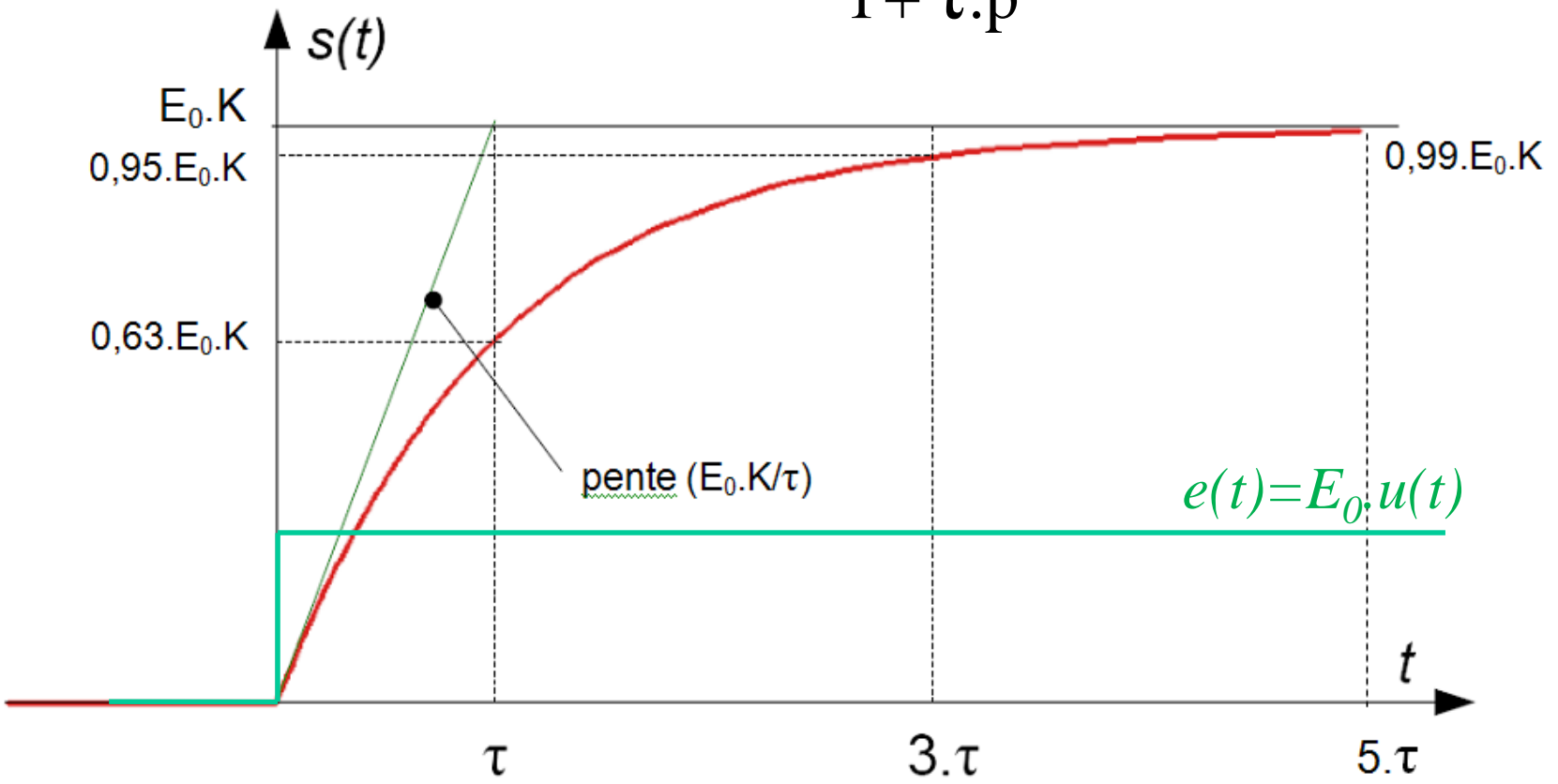
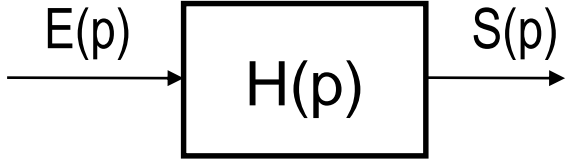
```
graph LR; E["E(p)"] --> H["H(p)"]; H --> S["S(p)"]
```

avec :  $\tau$  : constante de temps (unité : seconde)  
 $K$  : gain statique (unité : [s] / [e])

# Analyse temporelle d'un 1<sup>er</sup> ordre

## Réponse indicielle d'un 1<sup>er</sup> ordre :

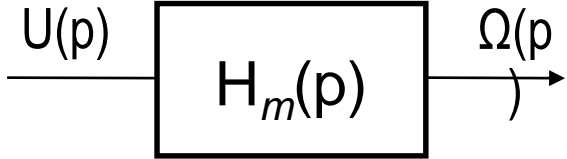
$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$$



# Analyse temporelle d'un 1<sup>er</sup> ordre

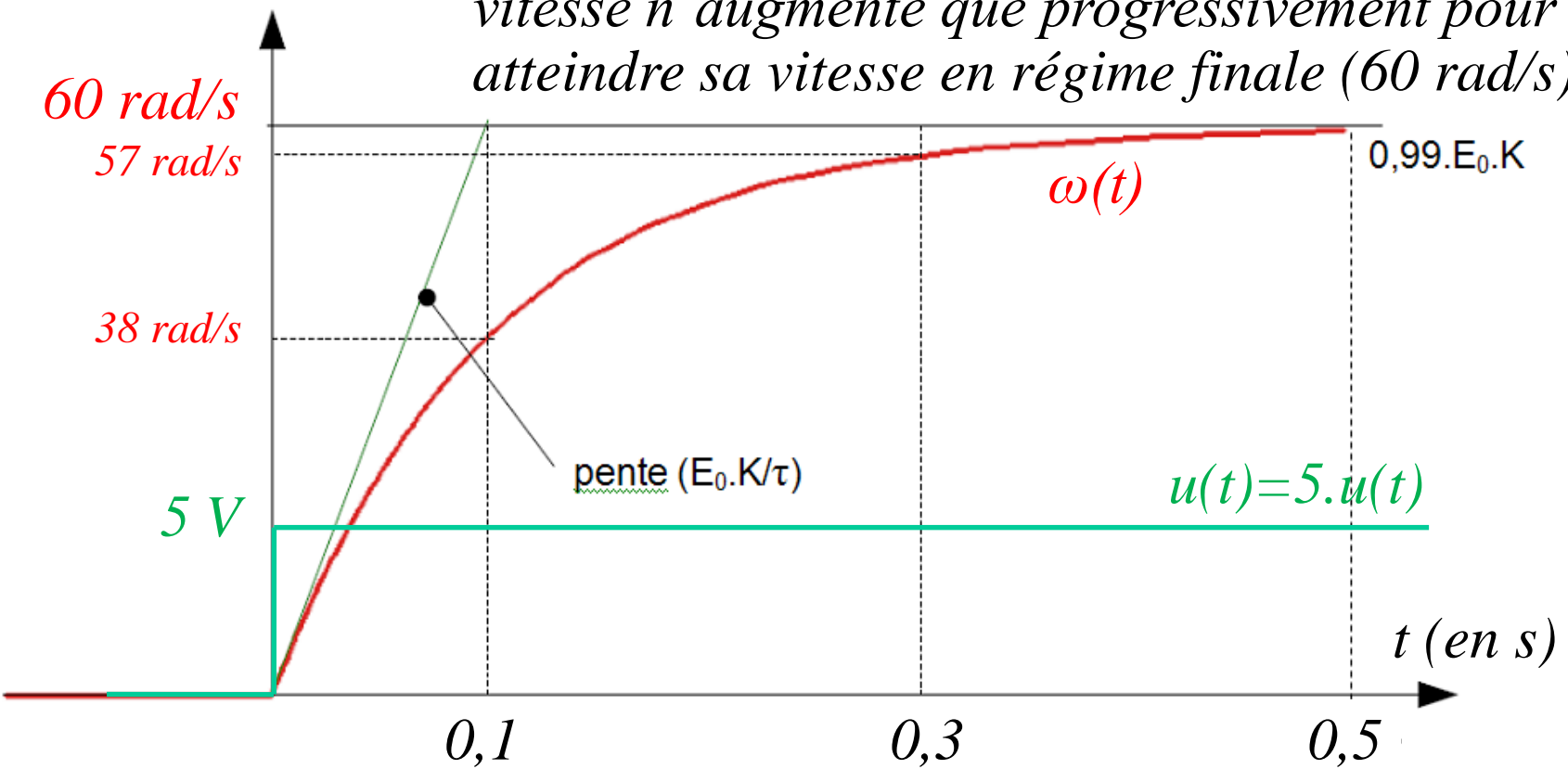
**Réponse indicielle d'un 1<sup>er</sup> ordre :**

*Exemple : vitesse d'un moteur CC :*



$$H(p) = \frac{12 \leftarrow u_{SI}}{1 + 0,1.p}$$

*Le moteur démarre immédiatement, mais sa vitesse n'augmente que progressivement pour atteindre sa vitesse en régime finale (60 rad/s)*



# Critères de qualité d'un système asservi

Quatre critères de qualité sont étudiés dans le cadre de notre programme.

*Régime établi  
(permanent)*

▶ Stabilité

⇒ « À entrée bornée sortie bornée »

▶ Précision

⇒ { Précision statique  
Précision dynamique

*Régime transitoire*

▶ Rapidité

⇒ Temps de réponse à 5% ( $tr_{5\%}$ )

*Régime établi  
(permanent)*

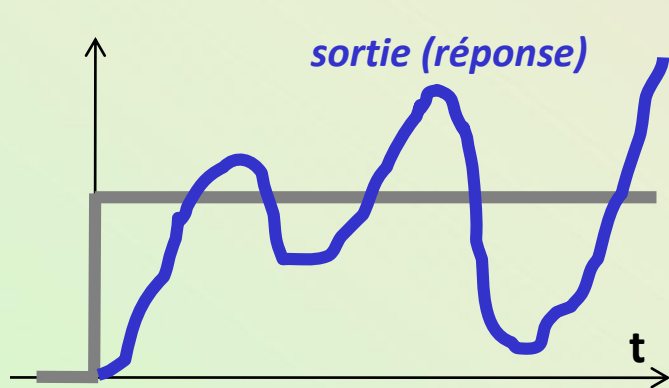
▶ Amortissement

⇒ 1<sup>er</sup> dépassement ( $D_{1\%}$ )

« À entrée bornée sortie bornée »

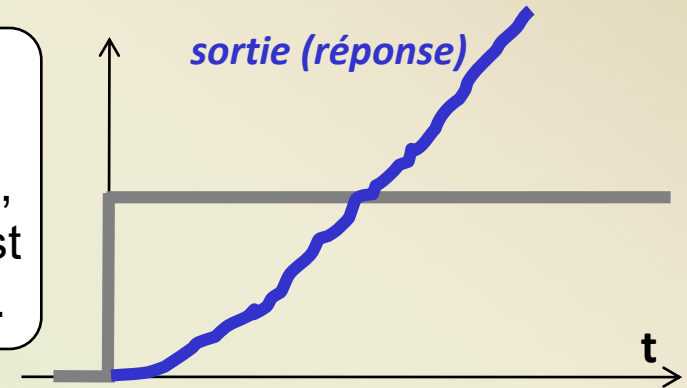
→ réponse à un échelon

**Système instable avec oscillations**



La sortie diverge (non bornée), avec ou sans oscillations, alors que l'entrée est constante (bornée).

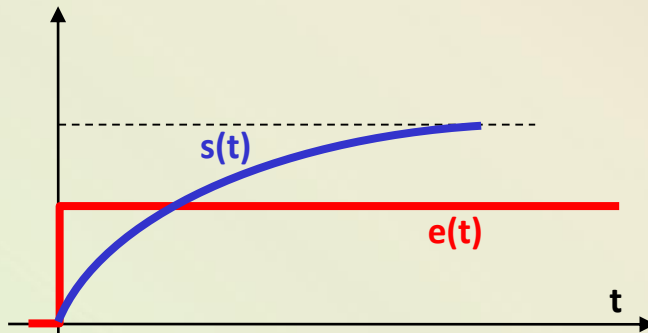
**Système instable sans oscillations**



*L'étude de la stabilité se fait à partir de la réponse fréquentielle (étude harmonique)*

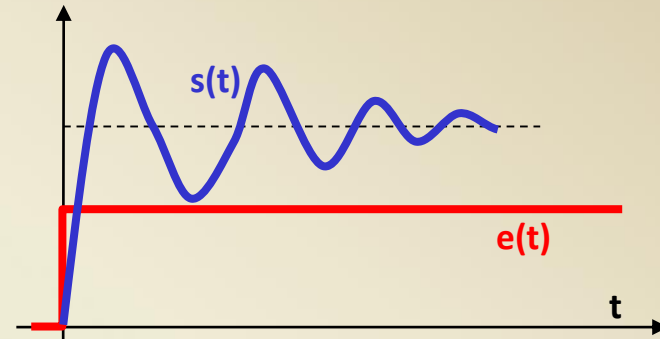
→ diagrammes de Bode

# Systeme stable



Pas d'oscillation  
en sortie.

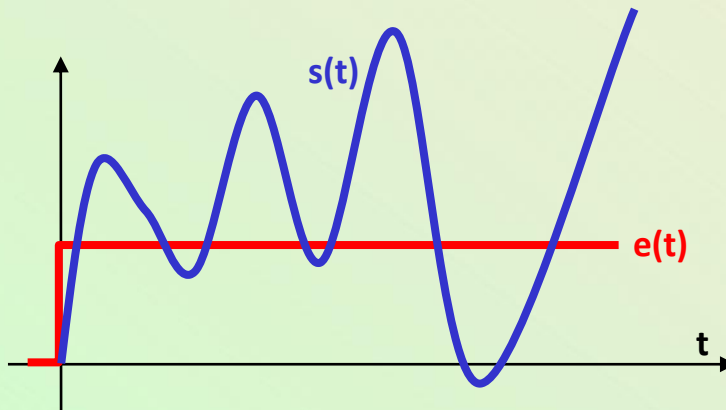
*apériodique*



*pseudopériodique*

Les oscillations  
de sortie  
s'amortissent.

# Systeme instable



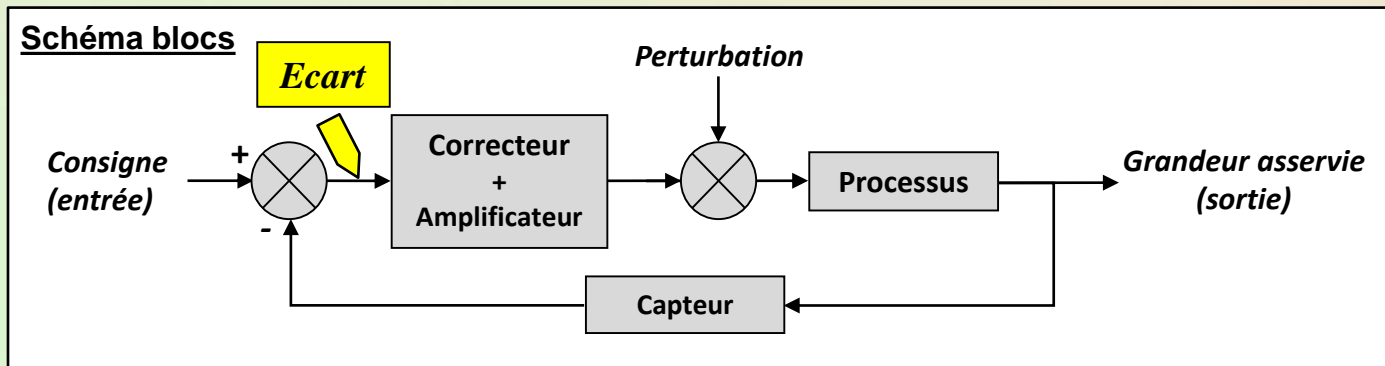
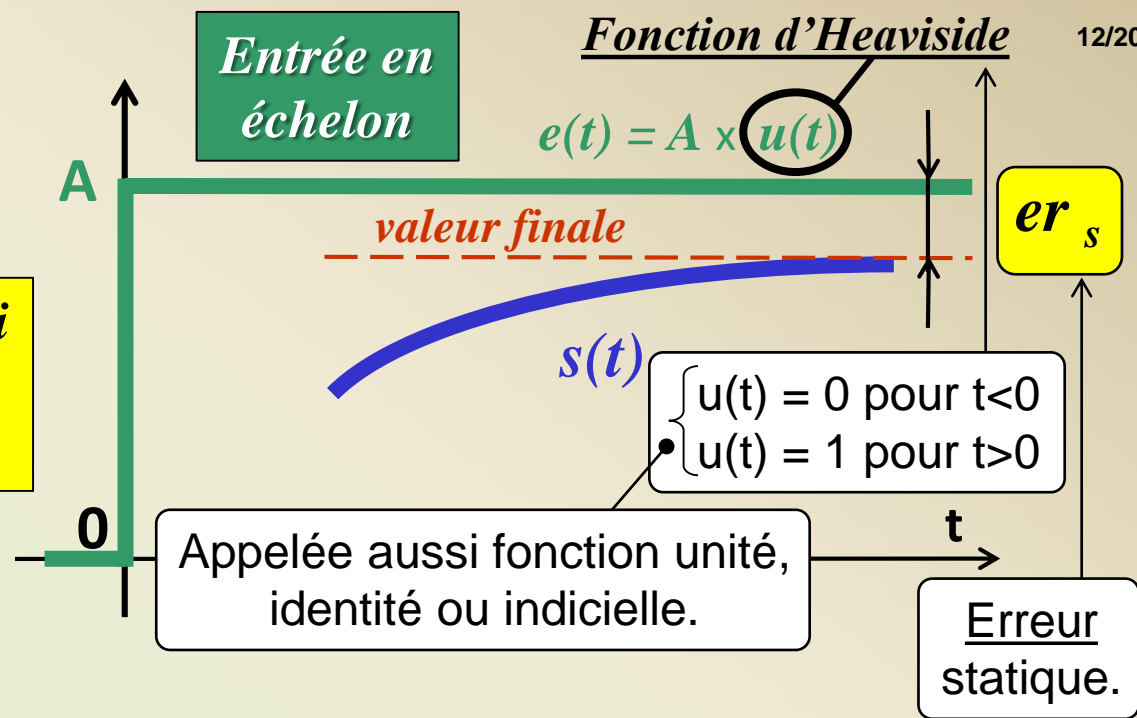
→ *rupture du mécanisme !*

« À entrée bornée sortie non bornée. »

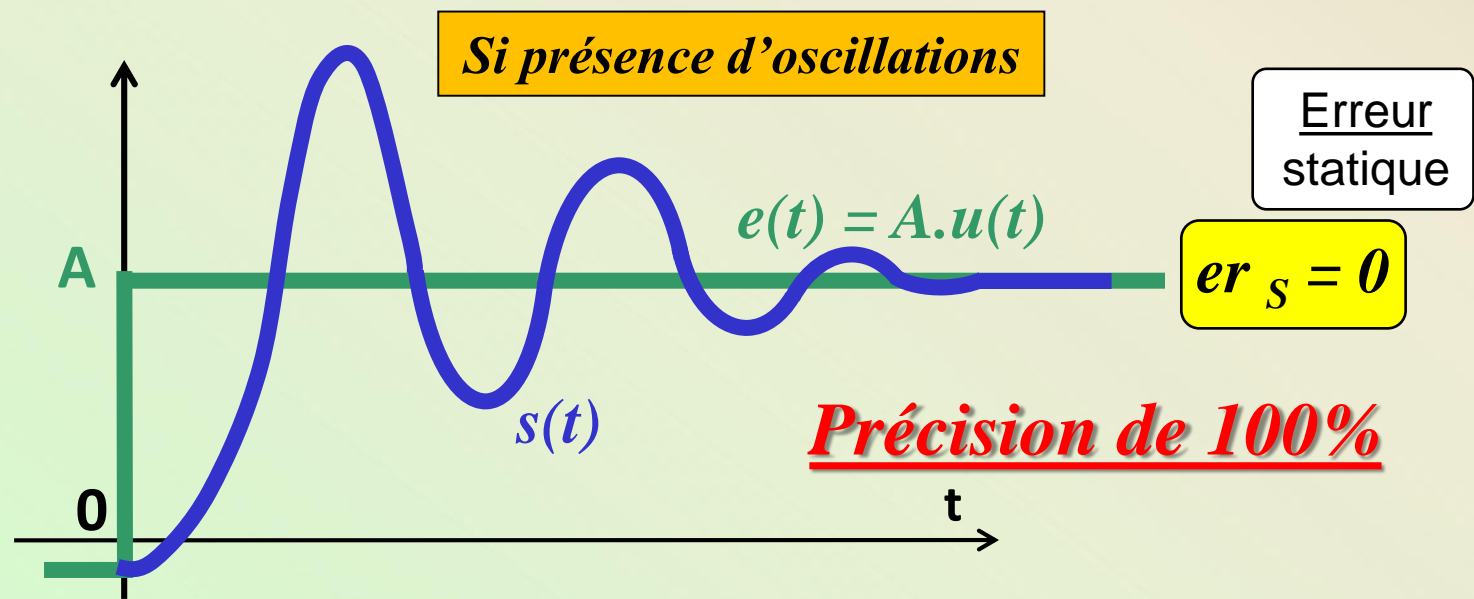
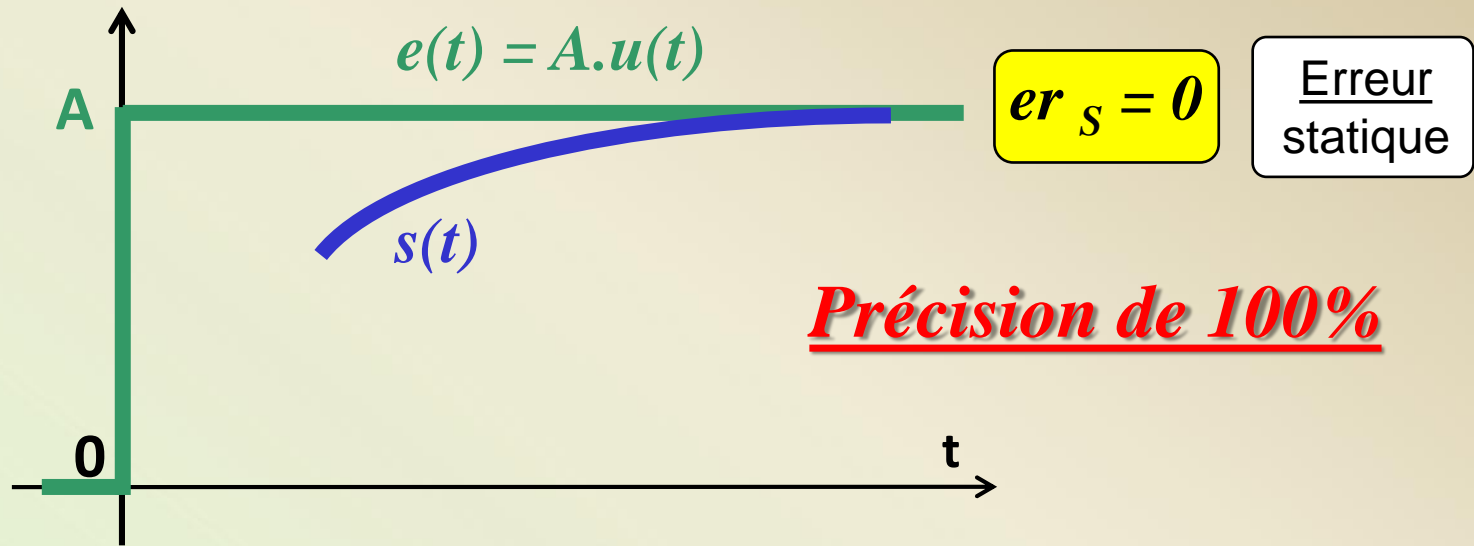
## Précision statique

Aptitude du système asservi à atteindre la valeur de consigne constante.

→ réponse à un échelon



$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecart statique} \quad \rightarrow \quad \text{entrée - retour} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{entrée} - \text{retour}) \\ \text{Erreur statique} \quad \rightarrow \quad \text{entrée - sortie} \quad \rightarrow \quad er_s = \lim_{t \rightarrow \infty} (\text{entrée} - \text{sortie}) \end{array} \right.$$





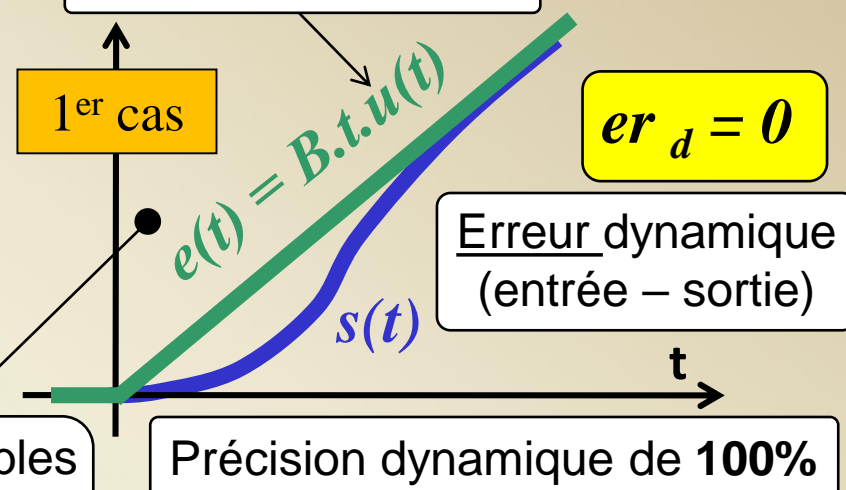
# Précision dynamique

Aptitude du système asservi à suivre la valeur de consigne qui évolue.

→ réponse à une rampe

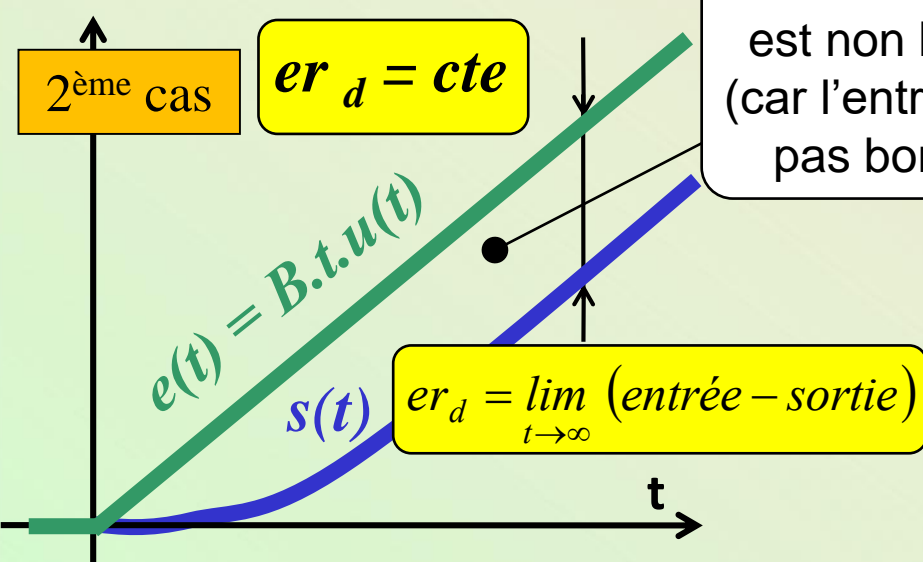
Fonction d'Heaviside

1<sup>er</sup> cas



2<sup>ème</sup> cas

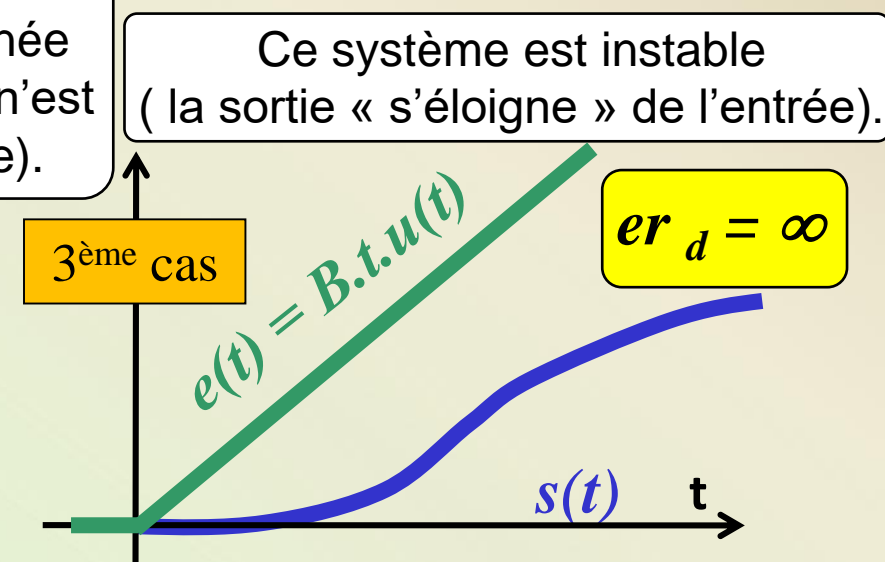
$er_d = cte$



Systèmes stables même si la sortie est non bornée (car l'entrée n'est pas bornée).

3<sup>ème</sup> cas

$er_d = \infty$

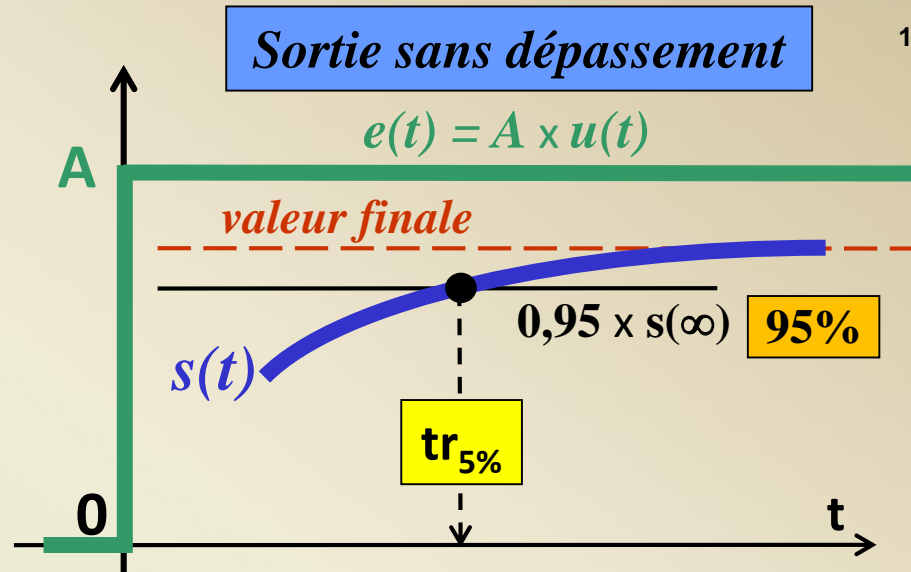


On parle d'écart (ou d'erreur) dynamique, de poursuite ou de trainage

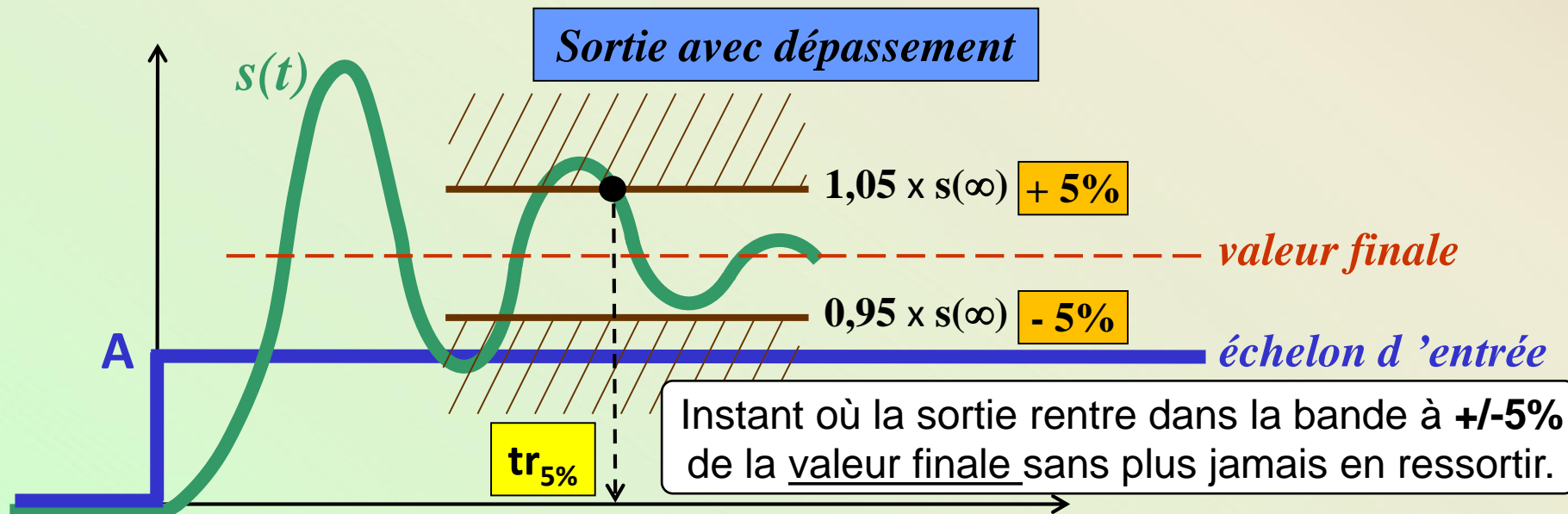
## 7) Rapidité

Aptitude du système asservi à atteindre rapidement une nouvelle valeur de consigne.

→ Temps de réponse à 5%  
(réponse à un échelon)

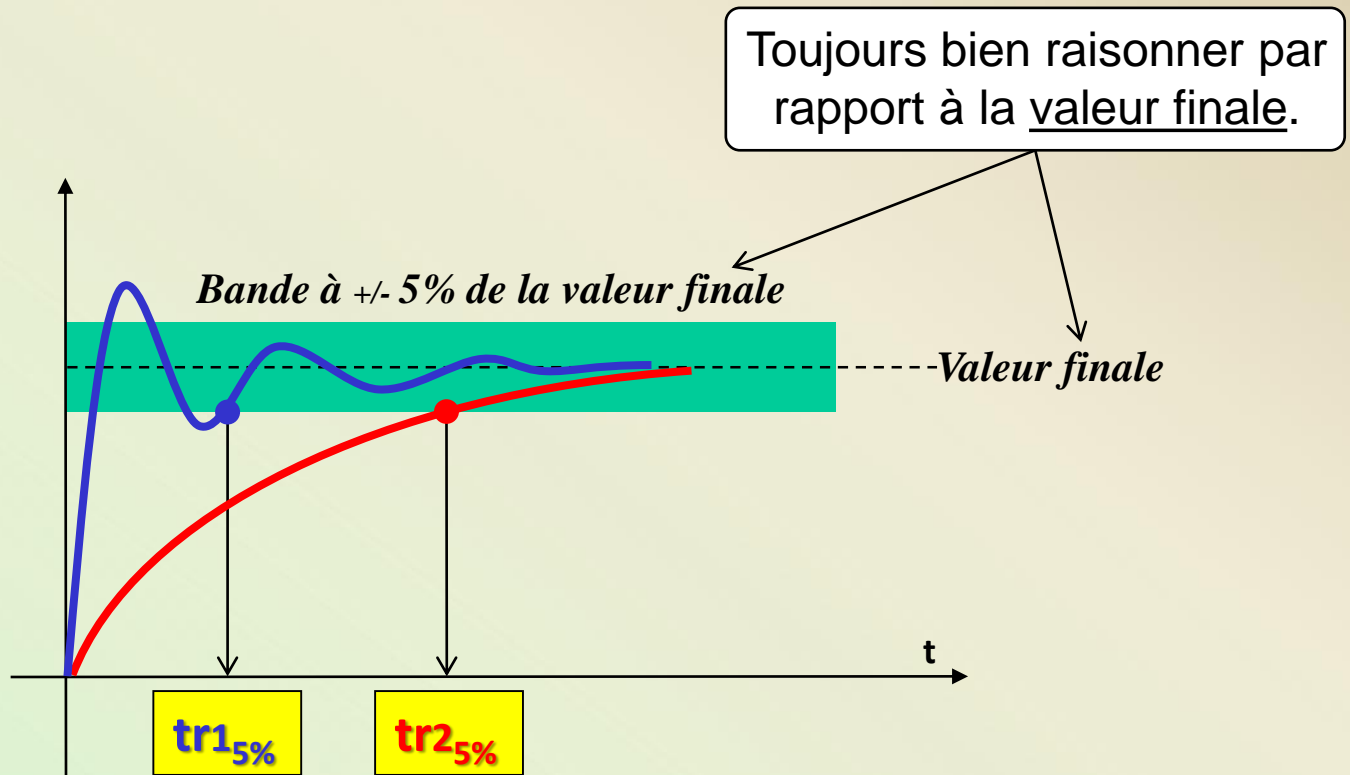


Instant où la sortie atteint **95%** de la valeur finale.



Instant où la sortie rentre dans la bande à **+/-5%** de la valeur finale sans plus jamais en ressortir.

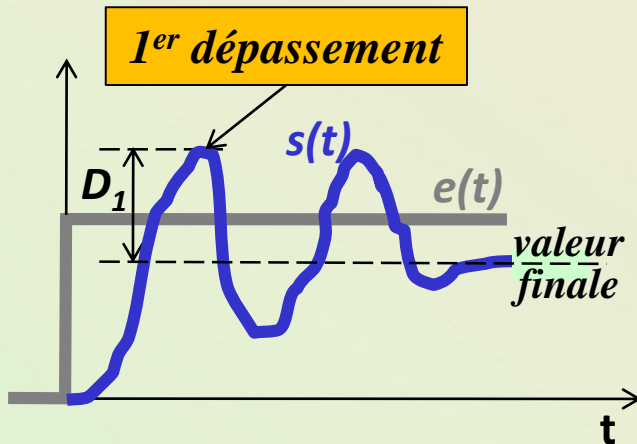
## Synthèse :



## 8) Amortissement

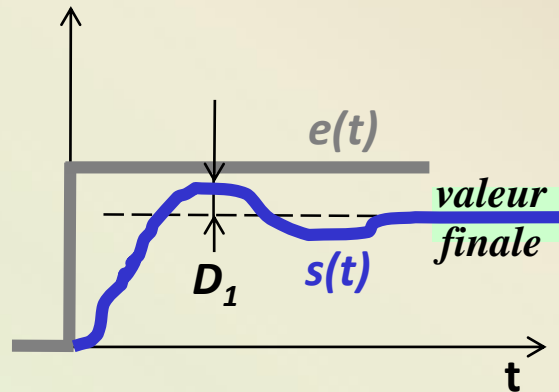
*Aptitude du système asservi à avoir des oscillations peu prononcées.*

→ réponse à un échelon



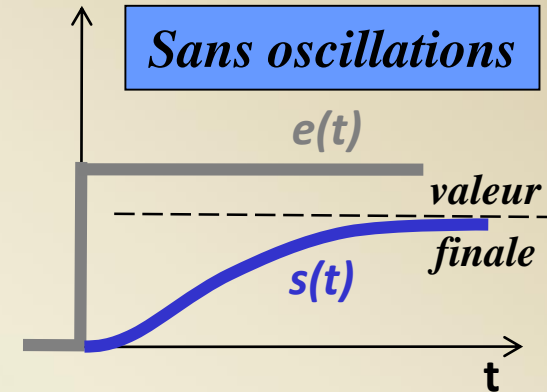
$D_1$  est "trop" grand  
(et "trop" d'oscillations)

→ système mal amorti



$D_1$  est "correct"  
(et "peu" d'oscillations)

→ système bien amorti



Sans oscillations

Pas de dépassement  
( $D_1$  est nul)

→ système très amorti

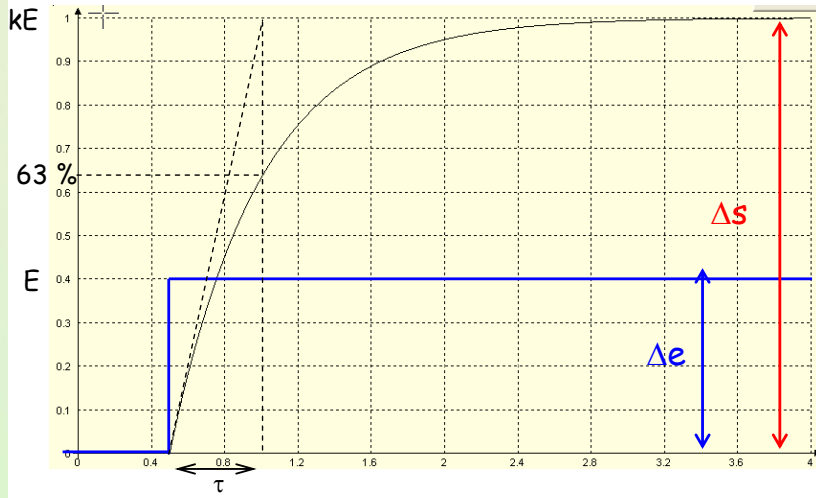
$D_1$  est généralement exprimé en pourcentage de la valeur finale

$D_1$  représente la hauteur du 1<sup>er</sup> dépassement (1<sup>er</sup> pic) par rapport à la valeur finale et non pas la hauteur totale de ce 1<sup>er</sup> pic.

$$\frac{\text{hauteur totale du 1}^{\text{er}} \text{ pic} - \text{valeur finale}}{\text{valeur finale}} \times 100$$

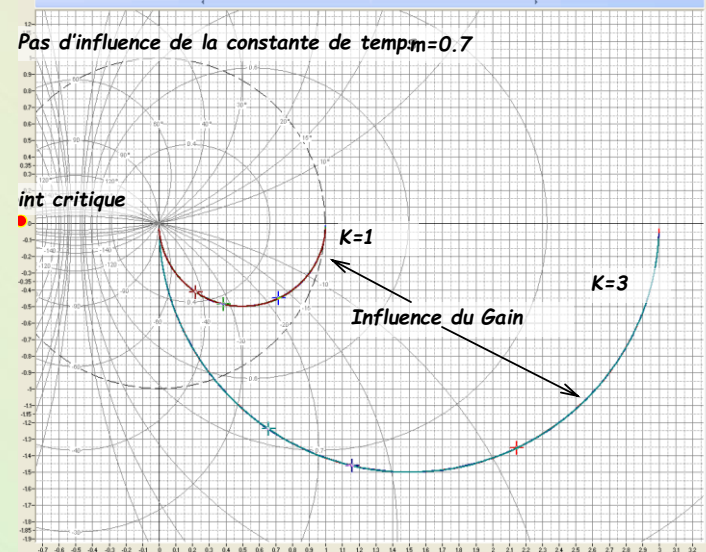
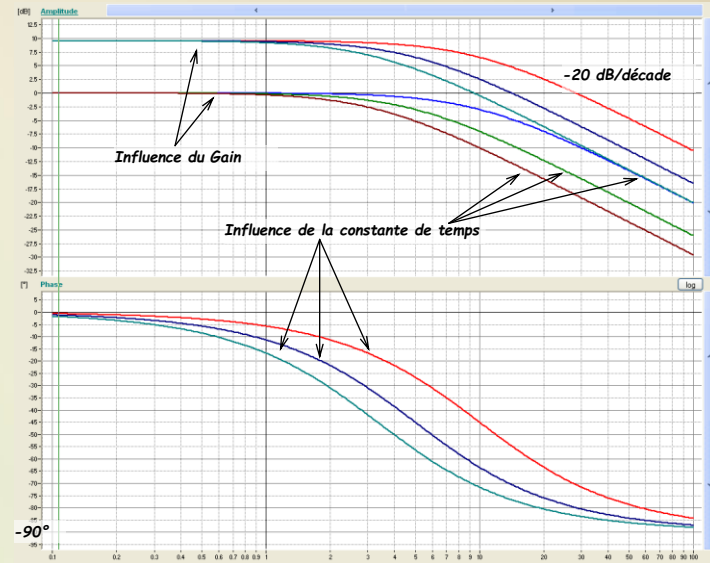
# Modélisation des systèmes linéaires

## Modèle du premier ordre



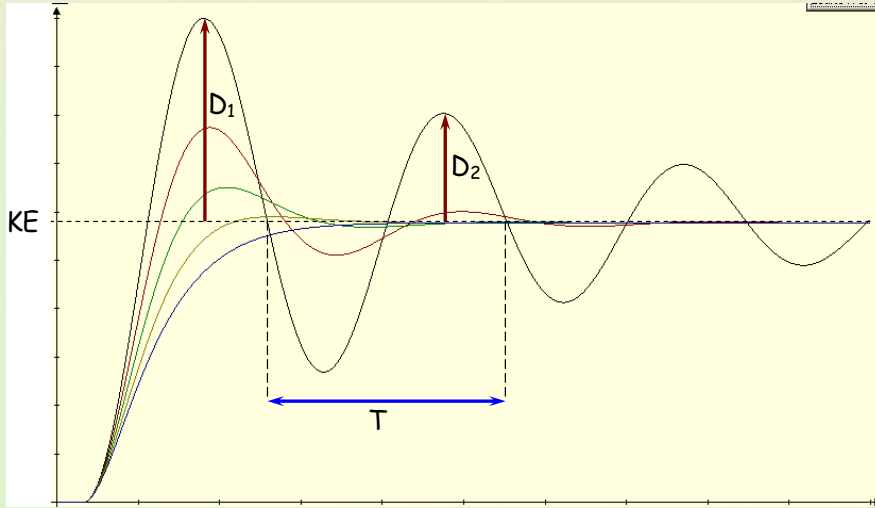
$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = k \cdot e(t)$$

$$H(p) = \frac{k}{1 + \tau p}$$



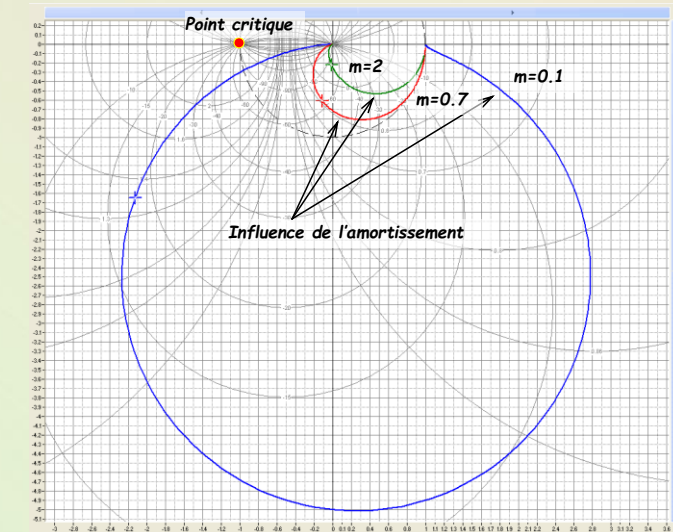
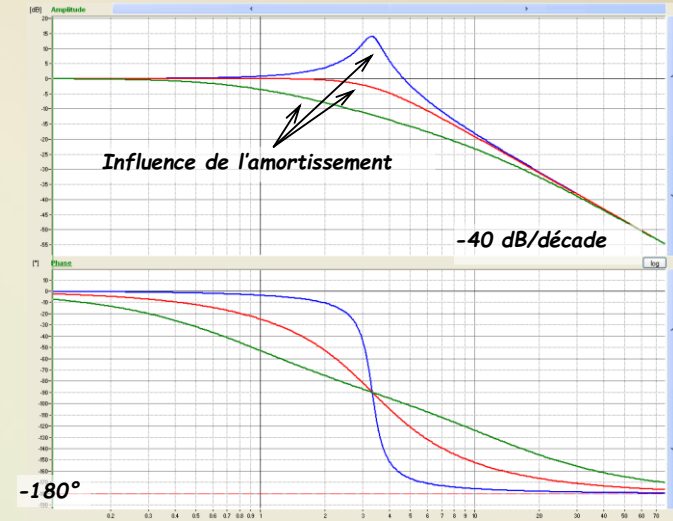
# Modélisation des systèmes linéaires

## Modèle du second ordre



$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = g(t)$$

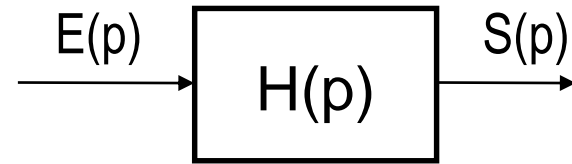
$$H(p) = k \frac{1}{1 + \frac{2mp}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$



# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

Systeme du 2<sup>e</sup> ordre (forme canonique) :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$



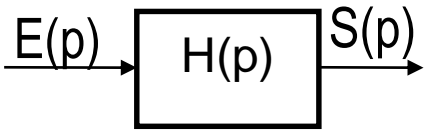
avec :  $\omega_0$  : pulsation propre non amortie (unité :  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$\xi$  : (« xi ») coefficient d'amortissement (sans unité)  
(on emploie aussi les notations  $z$  ou  $m$ ) ;

$K$  : gain statique (unité :  $[\text{s}] / [\text{e}]$  ).

# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

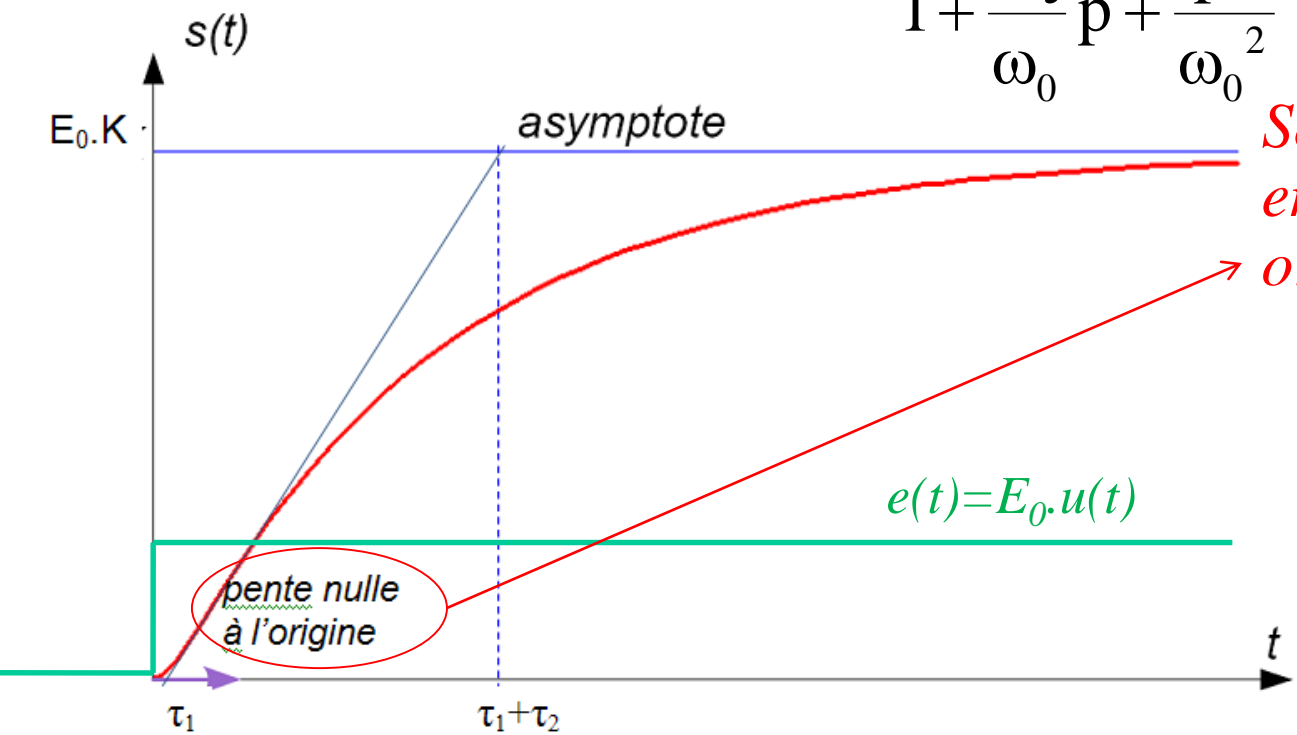
Réponse indicielle d'un 2<sup>e</sup> ordre :



$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

2<sup>e</sup> ordre amorti (ou « non-oscillant ») :  $\xi > 1$

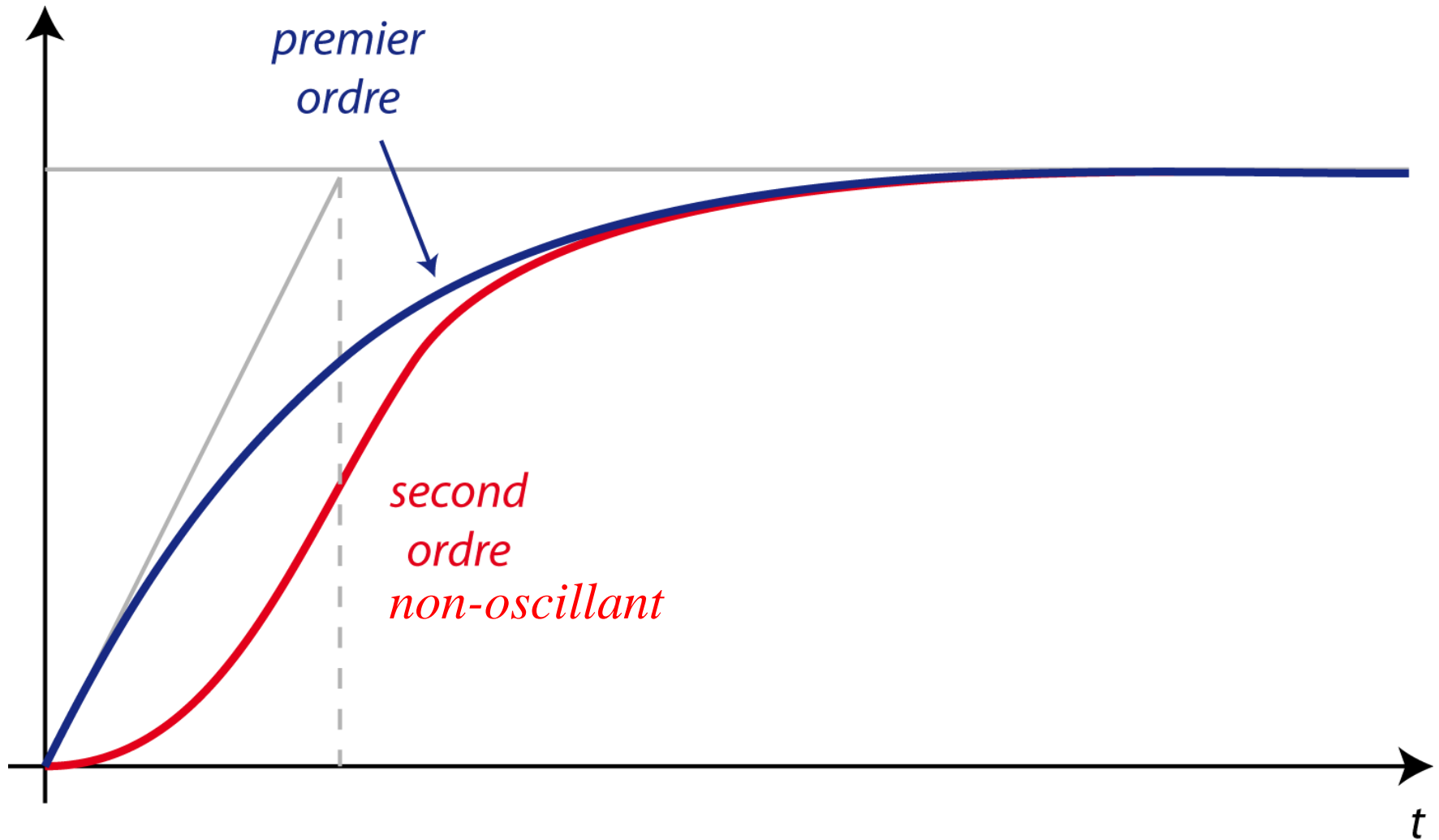
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K}{(1 + \tau_1 \cdot p) \cdot (1 + \tau_2 \cdot p)}$$



*Seule différence visible entre 1<sup>er</sup> ordre et 2<sup>e</sup> ordre non-oscillant*

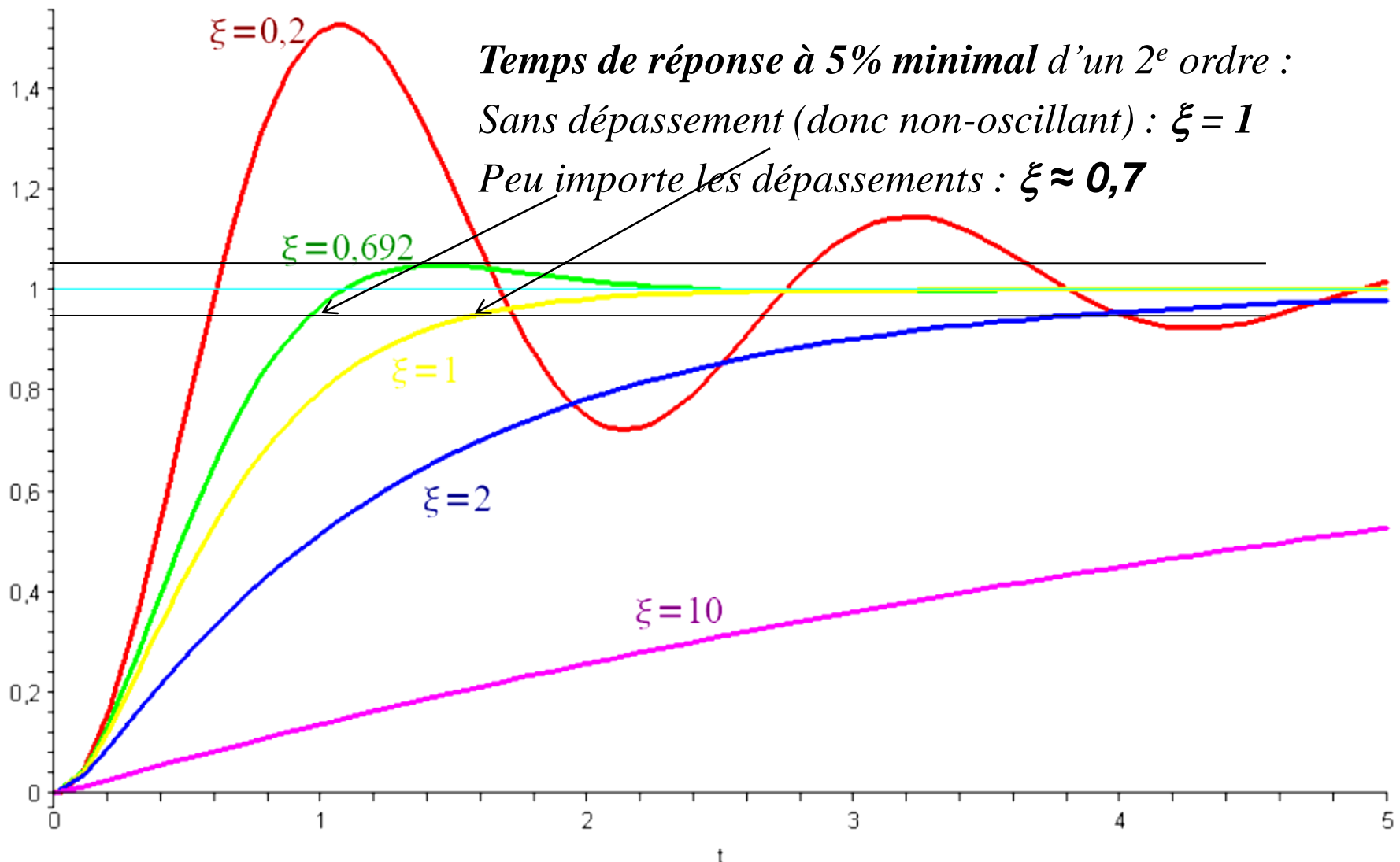


# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre



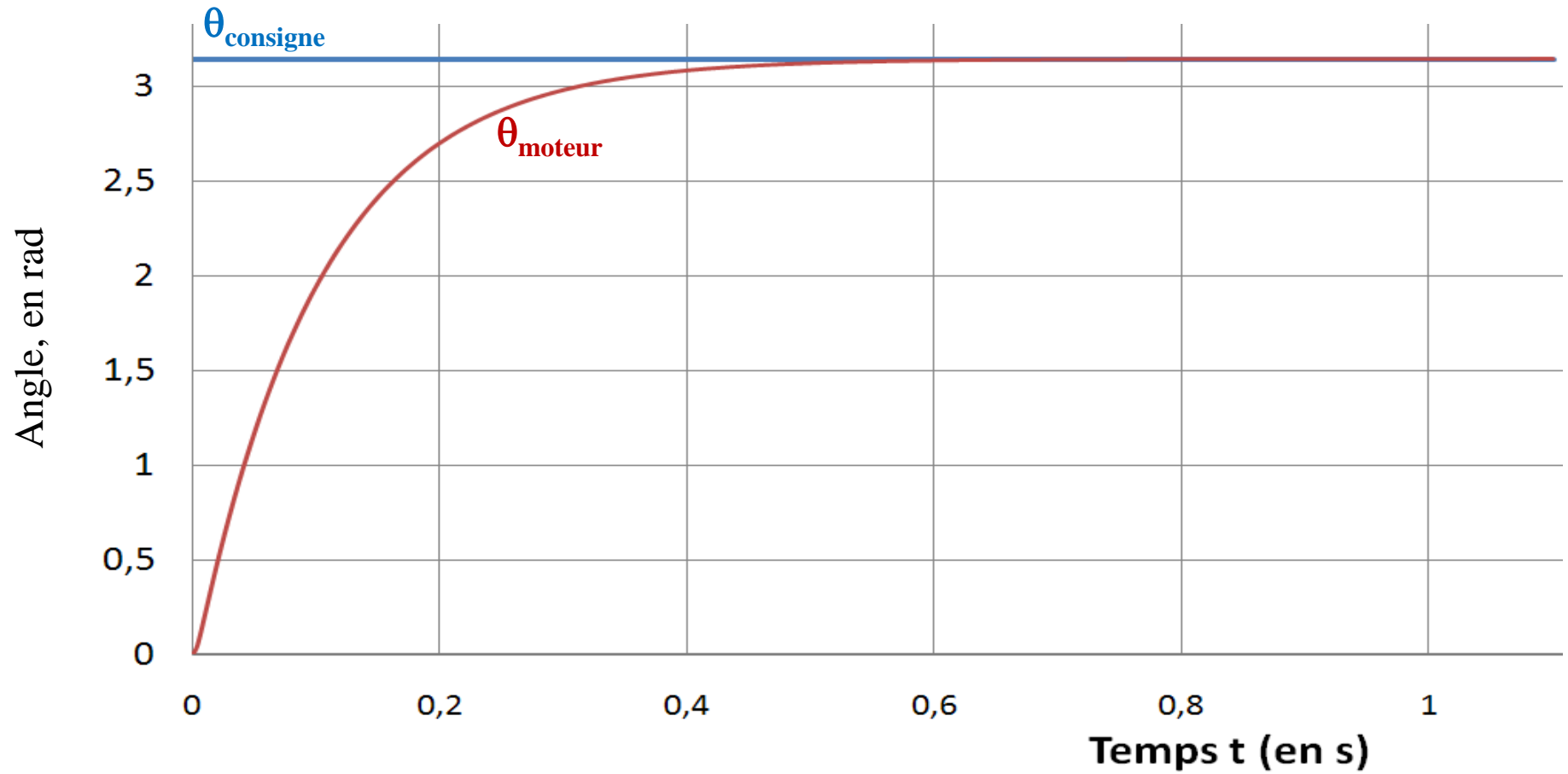
# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

## Réponse indicielle d'un 2<sup>e</sup> ordre, en fonction de $\xi$ :



# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

**Exemple de réponses indicielles d'un 2<sup>e</sup> ordre non-oscillant :**  
**Moteur CC asservi en position, avec correcteur proportionnel faible (lent, non-oscillant, ressemble à un 1<sup>er</sup> ordre).**  
**Consigne demi-tour ( $3,14 \text{ rad}$ ) :**

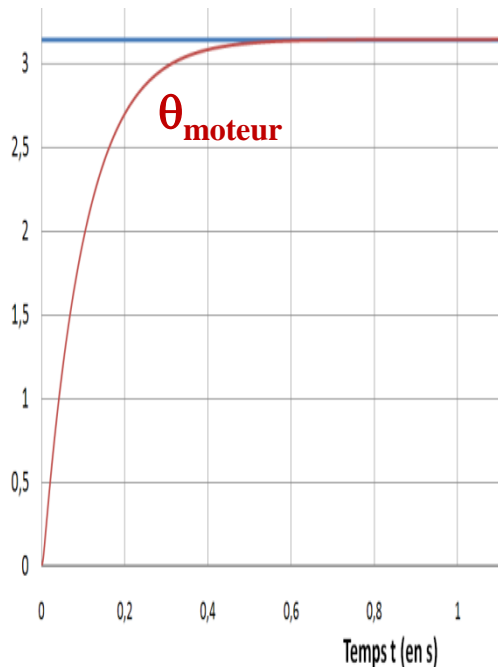


# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

Exemple de réponses indicielles d'un 2<sup>e</sup> ordre :

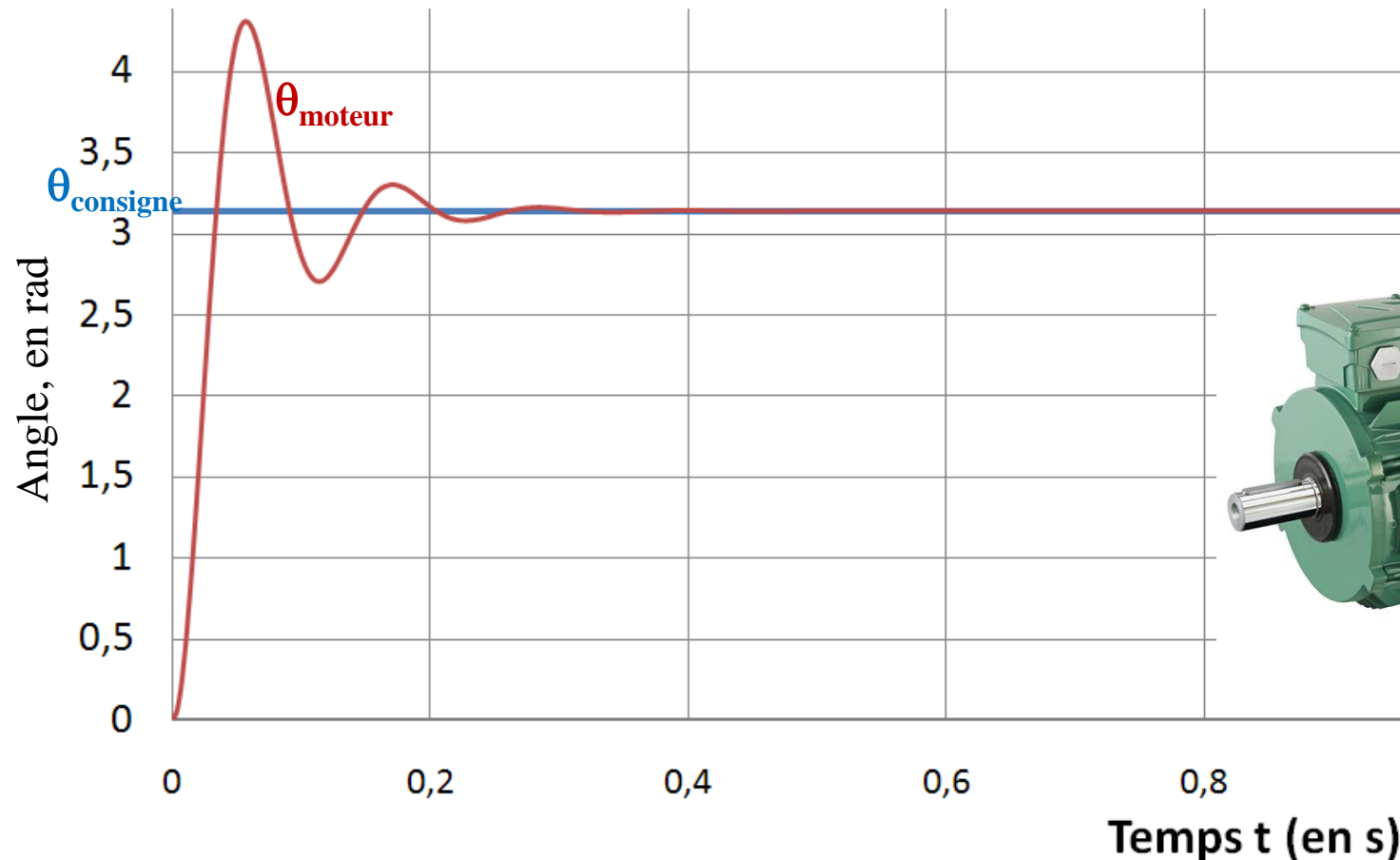
**Moteur CC asservi en position, avec correcteur proportionnel faible (lent, non-oscillant, ressemble à un 1<sup>er</sup> ordre).**

**Consigne demi-tour ( $3,14 \text{ rad}$ ) :**



# Analyse temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

Exemple de réponses indicielles d'un 2<sup>e</sup> ordre oscillant :  
**Moteur CC asservi en position, avec correcteur proportionnel fort (rapide mais oscillant, ne ressemble pas à un 1<sup>er</sup> ordre).**  
**Consigne demi-tour (3,14 rad) :**

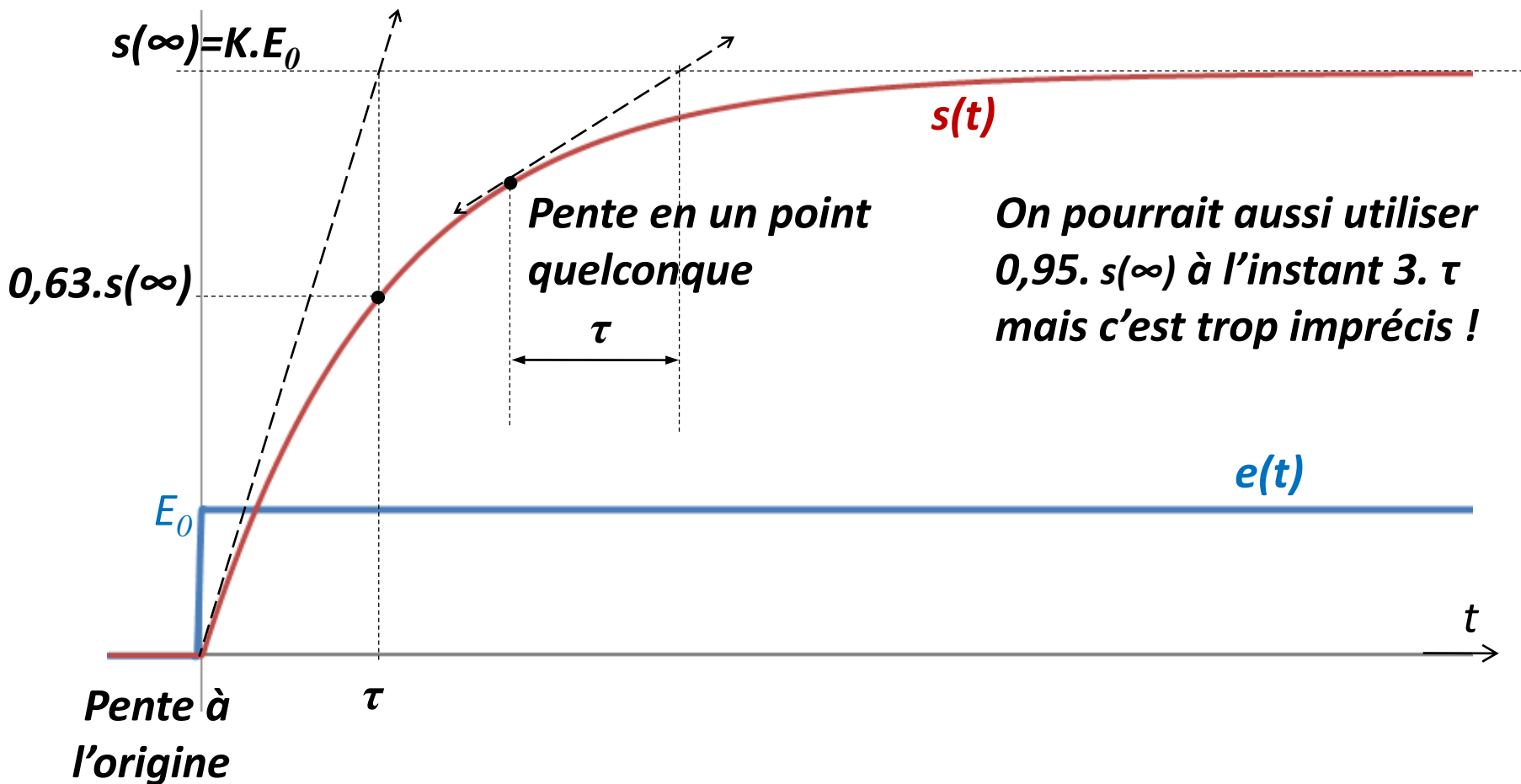


# Identification à un 1<sup>er</sup> ordre

Gain statique  $K$



$$H(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p}$$

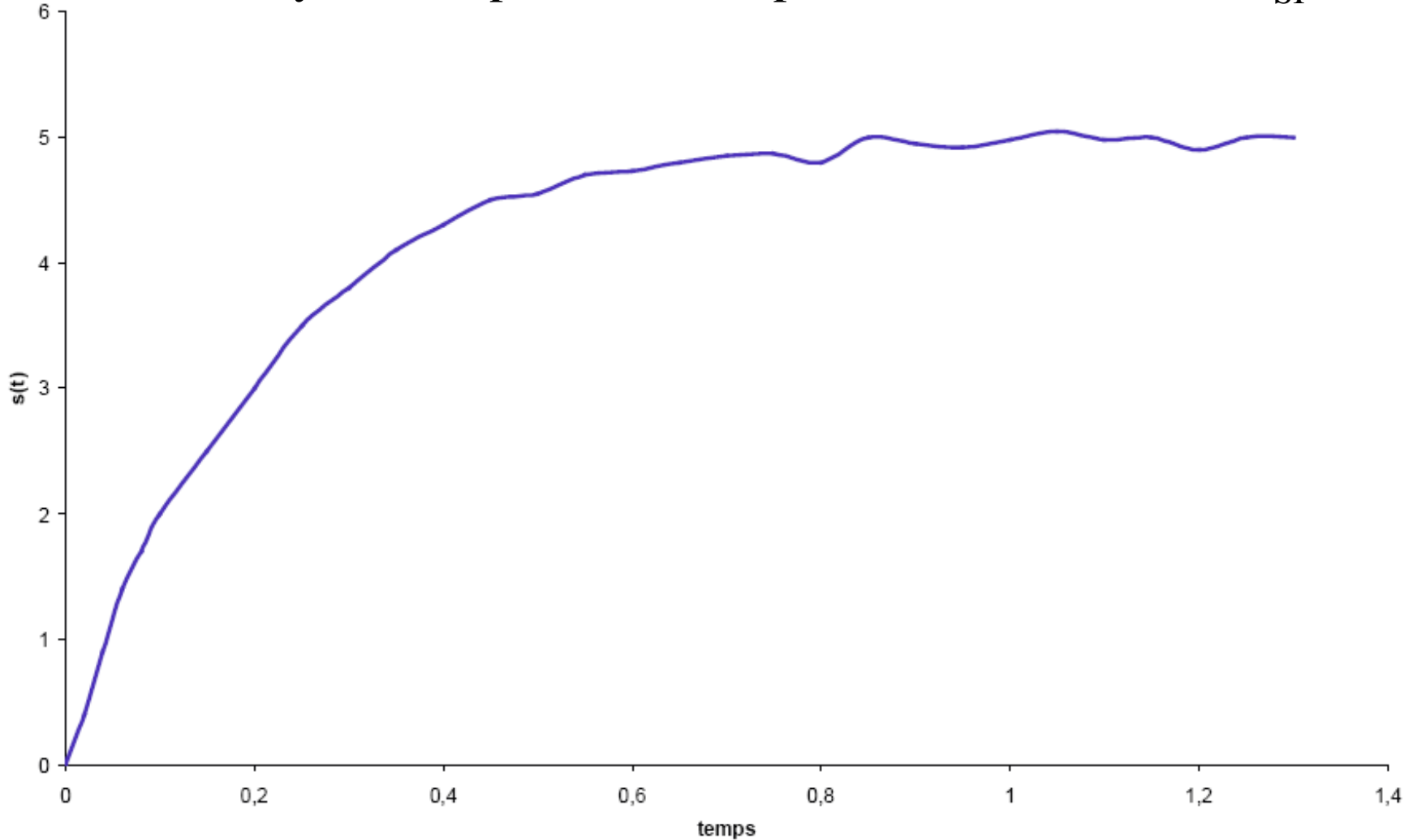


*On pourrait aussi utiliser 0,95.  $s(\infty)$  à l'instant  $3 \cdot \tau$  mais c'est trop imprécis !*

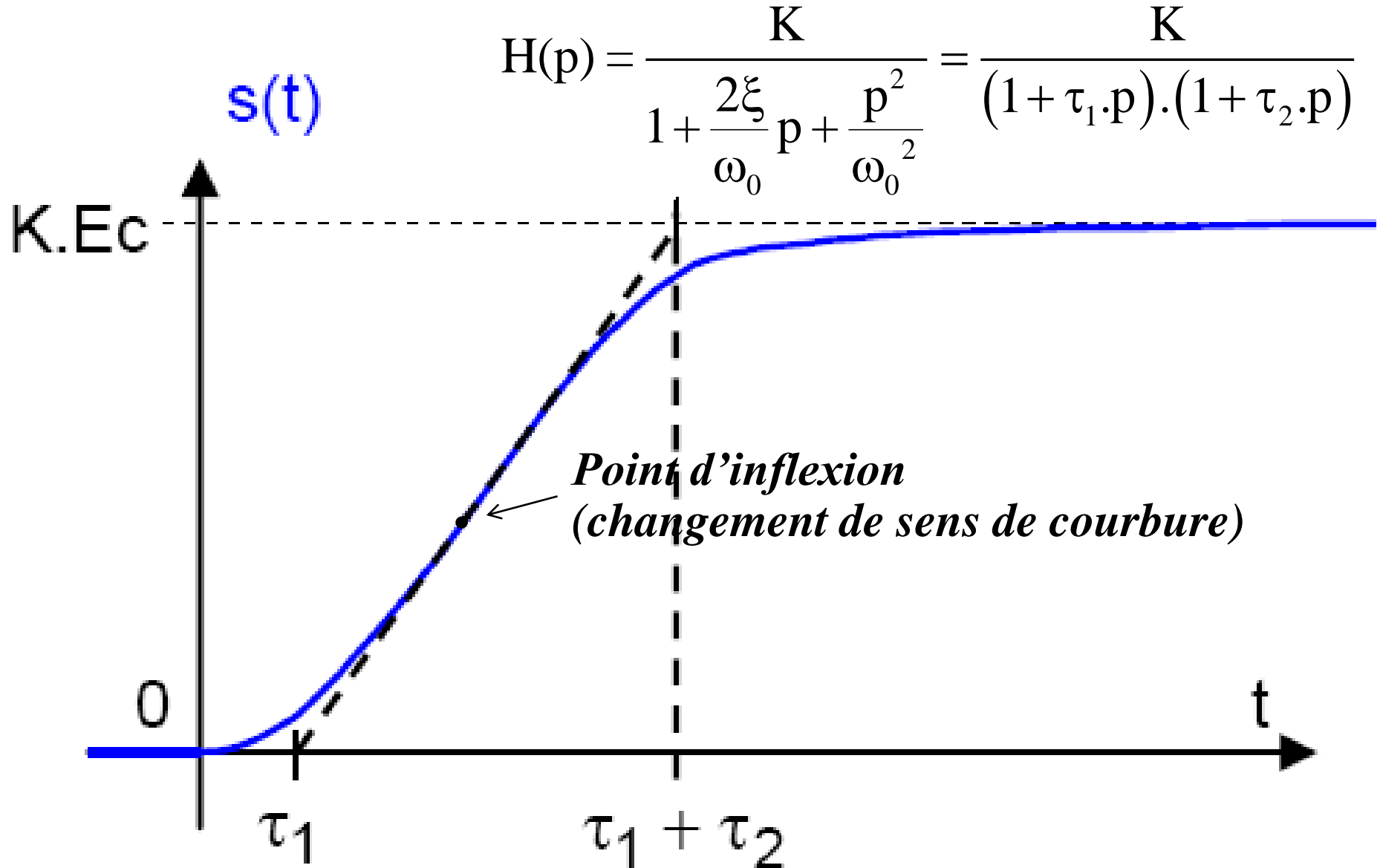
# Identification à un 1<sup>er</sup> ordre

## Exercice :

Identifier le système à partir de sa réponse à un échelon  $2,5u_{SI}$



# Identification à un 2<sup>e</sup> ordre apériodique



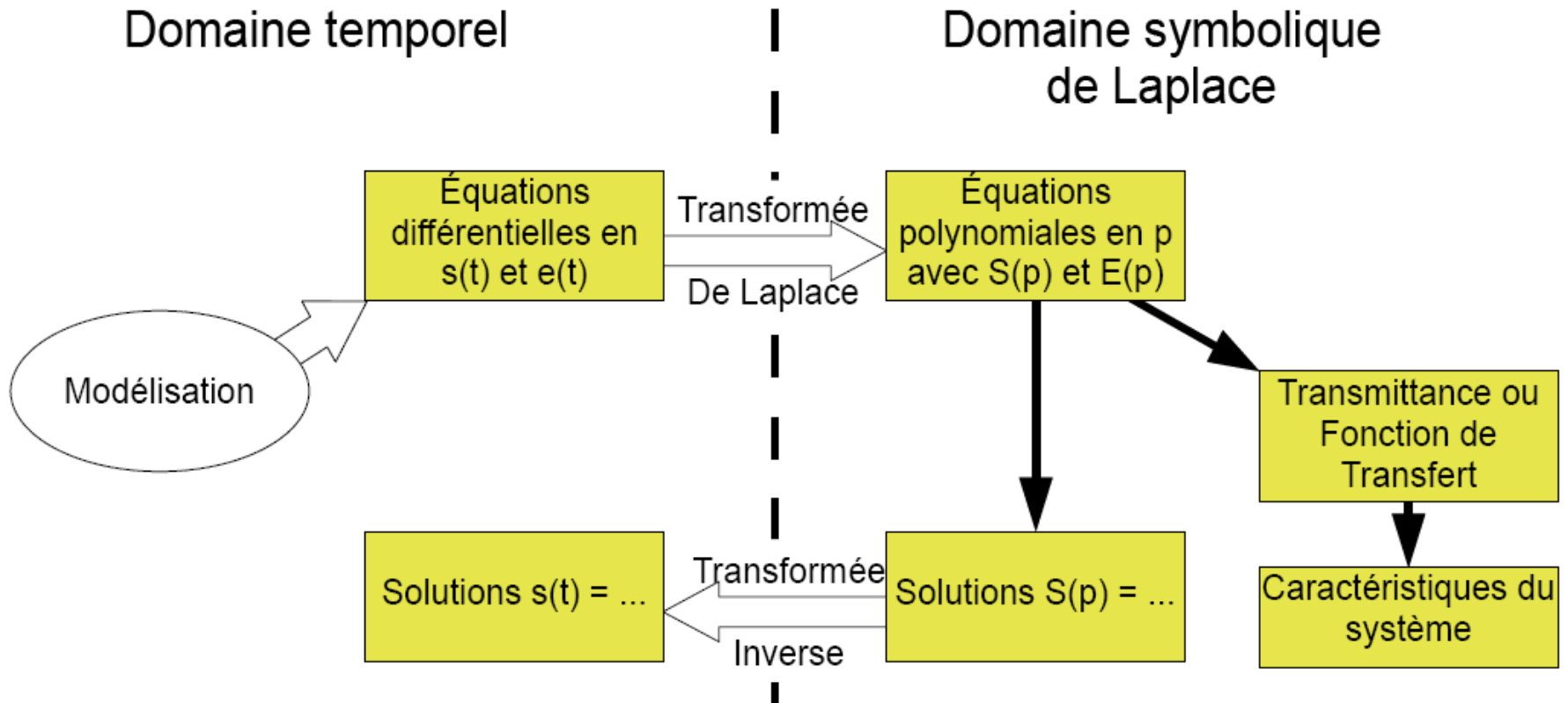


# Transformées de Laplace et FT

## Objectif :

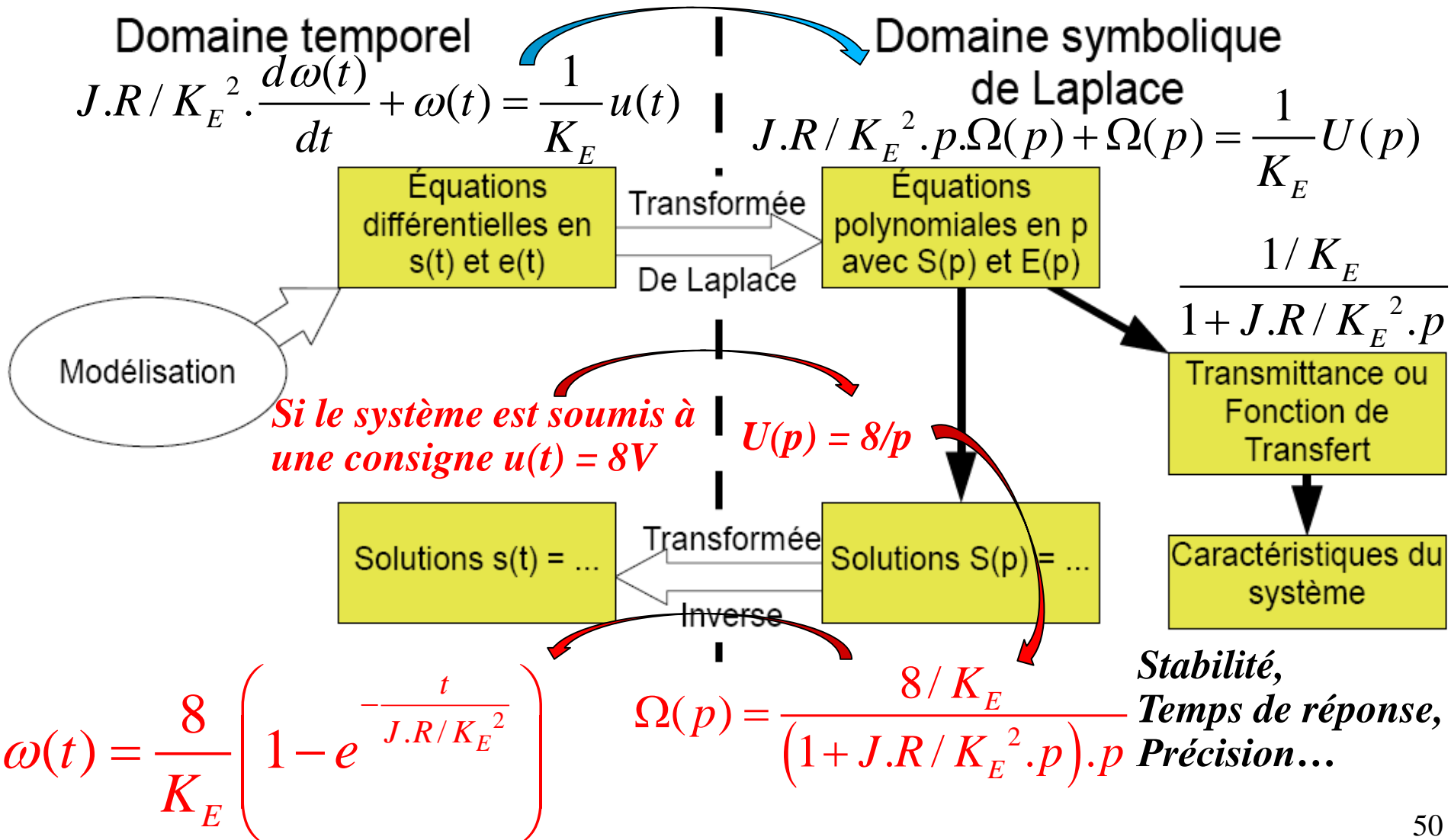
Supprimer les équations différentielles dans les calculs (simplifier les équations de modélisation).

## Démarche:



# Transformées de Laplace et FT

## Démarche (exemple d'un moteur CC) :



# Transformées de Laplace et FT

## Transformée de Laplace :

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p) = L[f(t)](p) = \int_{0^-}^{+\infty} f(t).e^{-p.t}.dt$$

avec **p** une **variable complexe**, dont l'unité est en  $s^{-1}$  :  $p = a + j.b$   
*avec  $j^2 = -1$*

$F(p) = L(f(t))$  : transformée de Laplace de la fonction  $f$ .

$f(t) = L^{-1}(F(p))$  : transformée inverse de la fonction  $F$ .

# Transformées de Laplace et FT

## Propriétés importantes de la transformée de Laplace :

Propriétés	$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
linéarité	$a.f_1(t) + b.f_2(t)$	$a.F_1(p) + b.F_2(p)$
dérivation	$f'(t)$	$p.F(p)$
intégration	$\int_{0^-}^t f(x).dx$	$\frac{F(p)}{p}$
retard	$f(t - \tau).u(t - \tau)$	$e^{-\tau.p}.F(p)$

# Transformées de Laplace et FT

## Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p.F(p))$$

$$\Rightarrow \text{Pente à l'origine : } \lim_{t \rightarrow 0^+} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (p^2.F(p))$$

## Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p.F(p))$$

$$\Rightarrow \text{Pente finale : } \lim_{t \rightarrow +\infty} (f'(t)) = \lim_{p \rightarrow 0^+} (p^2.F(p))$$

si la limite existe

# Transformées de Laplace et FT

## Fonction de transfert (FT) d'un système :

La FT d'un système est la traduction dans le domaine de Laplace de l'équation différentielle liant l'entrée et la sortie du système.

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + a_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + b_{m-1} \cdot \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

Transformation dans Laplace

$$a_n \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^n s(t)}{dt^n} \right] + a_{n-1} \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^{n-1} s(t)}{dt^{n-1}} \right] + \dots + a_0 \cdot \mathcal{L} [s(t)] = b_m \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^m e(t)}{dt^m} \right] + b_{m-1} \cdot \mathcal{L} \left[ \frac{d^{m-1} e(t)}{dt^{m-1}} \right] + \dots + b_0 \cdot \mathcal{L} [e(t)]$$

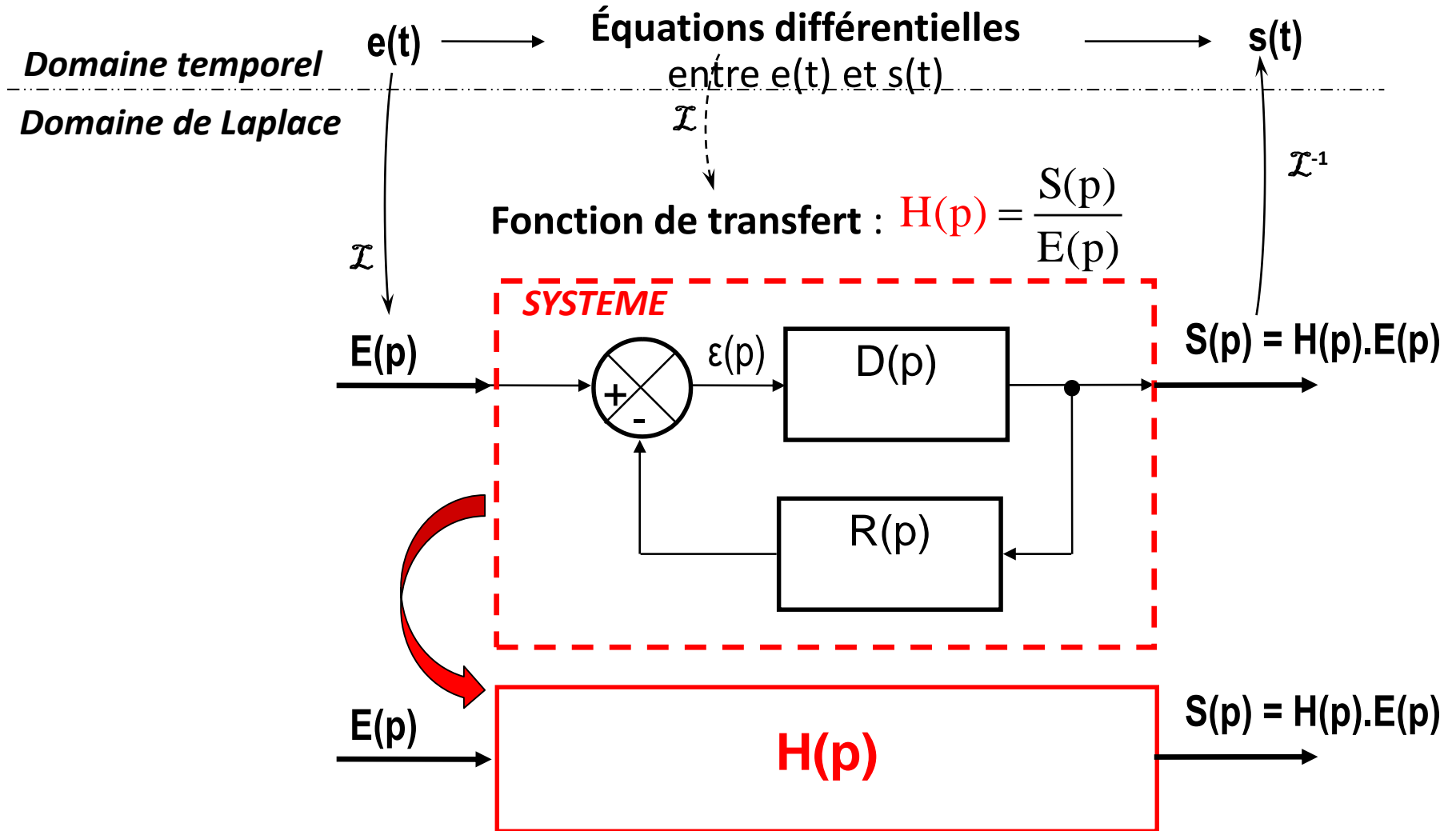
$$a_n \cdot p^n \cdot S(p) + a_{n-1} \cdot p^{n-1} \cdot S(p) + \dots + a_0 \cdot S(p) = b_m \cdot p^m \cdot E(p) + b_{m-1} \cdot p^{m-1} \cdot E(p) + \dots + b_0 \cdot E(p)$$

$$S(p) \cdot [a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n] = E(p) \cdot [b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]$$

$$S(p) = E(p) \cdot \frac{[b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m]}{[a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n]} \xrightarrow{\text{Fonction de transfert}} H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

# Transformées de Laplace et FT

## Fonction de transfert (FT) d'un système :



# Transformées de Laplace et FT

Forme canonique d'une Fonction de transfert :

$$H(p) = K \cdot \frac{1 + b_1 \cdot p + \dots + b_{m'} \cdot p^{m'}}{p^\alpha (1 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n'} \cdot p^{n'})}$$

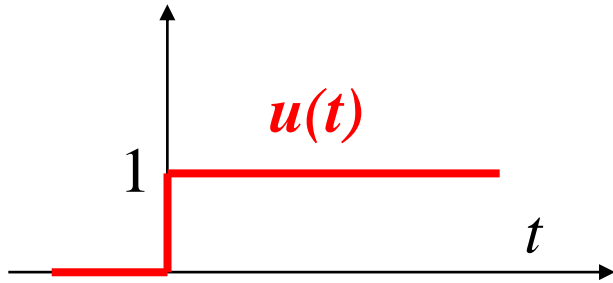
$n$  : **ordre** du système =  $\alpha + n'$  : degré du dénominateur ;  
 $\alpha$  : **classe** du système ;  
 $K$  : **gain statique** du système.

**Polynome en p**



# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

## Échelon unitaire, ou fonction d'Heaviside :



Échelon unitaire défini par :

$$u(t) = 1 \quad \text{pour } t \geq 0 ;$$

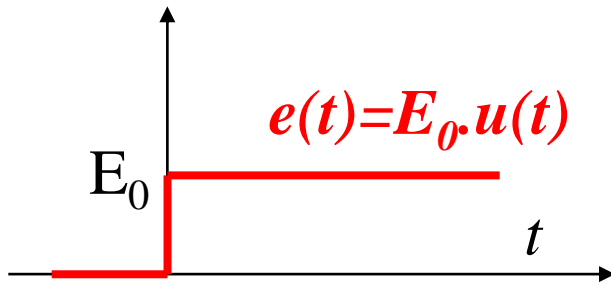
$$u(t) = 0 \quad \text{sinon.}$$

Tous les phénomènes physiques que l'on étudiera commenceront à  $t=0$ , et seront nuls avant (grâce éventuellement à un changement d'origine). Toutes les fonctions seront donc multipliées par  $u(t)$

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{p}$$

# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

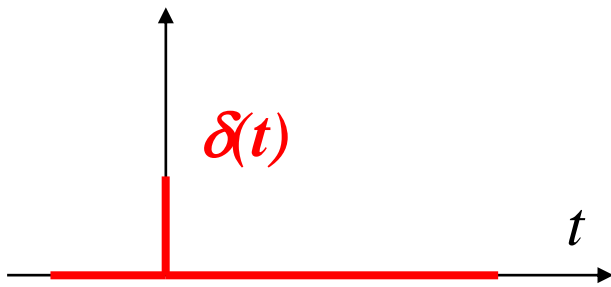
Échelon (ou « constante ») :



$$\mathcal{L}[E_0 \cdot u(t)] = \frac{E_0}{p}$$

# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

## Impulsion (de Dirac) :



Impulsion de Dirac définie par :

$$\delta(0) = +\infty ;$$

$$\delta(t) = 0 \quad \text{pour } t \neq 0 ;$$

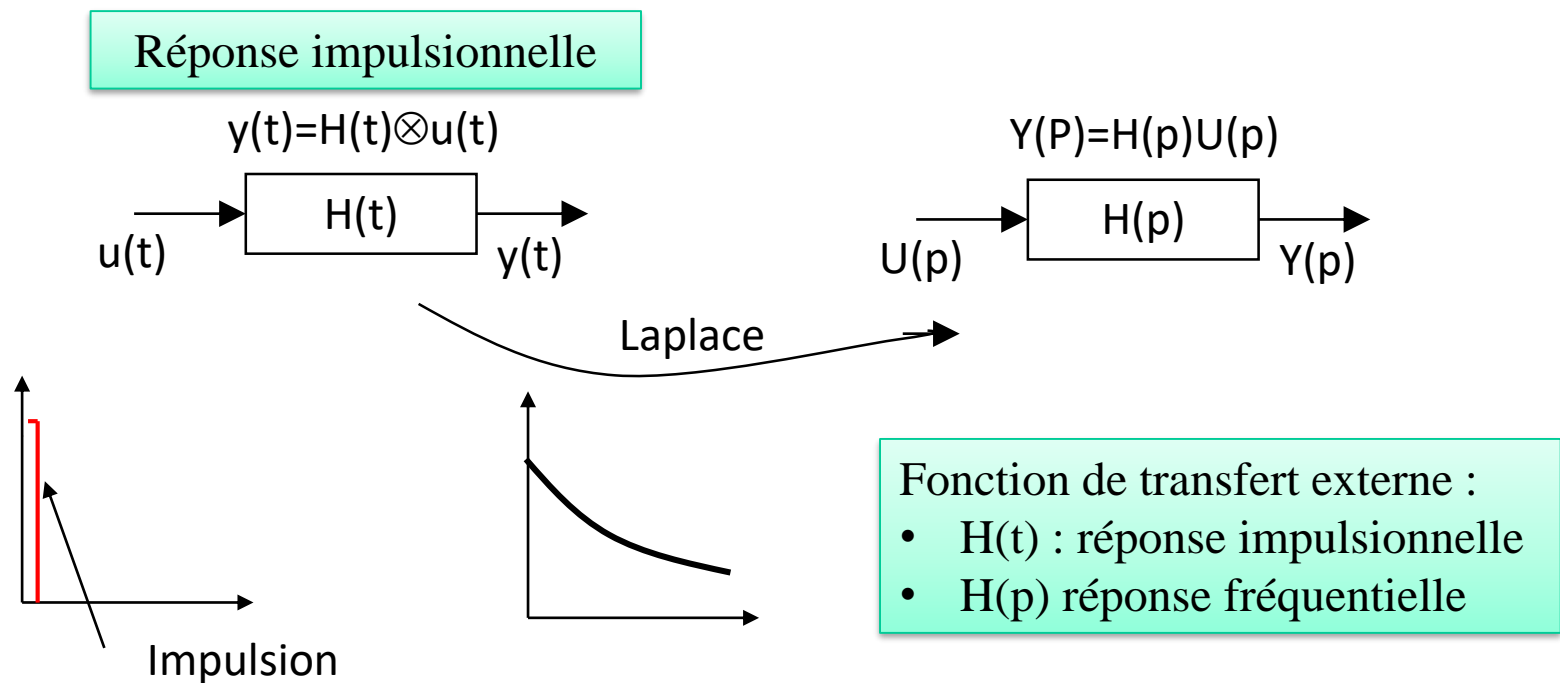
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).dt = 1$$

$$L[\delta(t)] = 1$$

L'impulsion de Dirac est la dérivée de l'échelon

# Représentation Externe

- La fonction de transfert d'un système LTI est de la forme :



# Représentation Externe

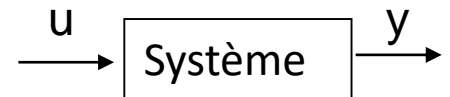
- La fonction de transfert d'un système LTI est de la forme :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m}{a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^n}$$

Fonction de  
transfert  
externe

- Vocabulaire :

- $G(p)$  est la fonction de transfert du Système
- L'ordre du système est  $n$
- Les racines de  $B(p)$  sont les Zéros du Système
- Les racines de  $A(p)$  sont les Pôles du Système
- Si  $m < n$  le système est Strictement Propre
- Si  $m = n$  le système est Propre
- Si  $m > n$  le système est Impropre



# Représentation Externe

- Le système :

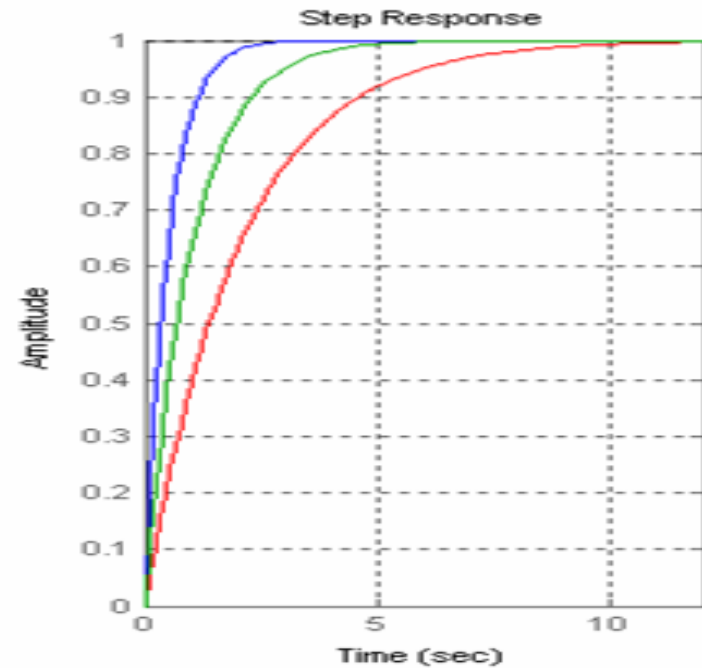
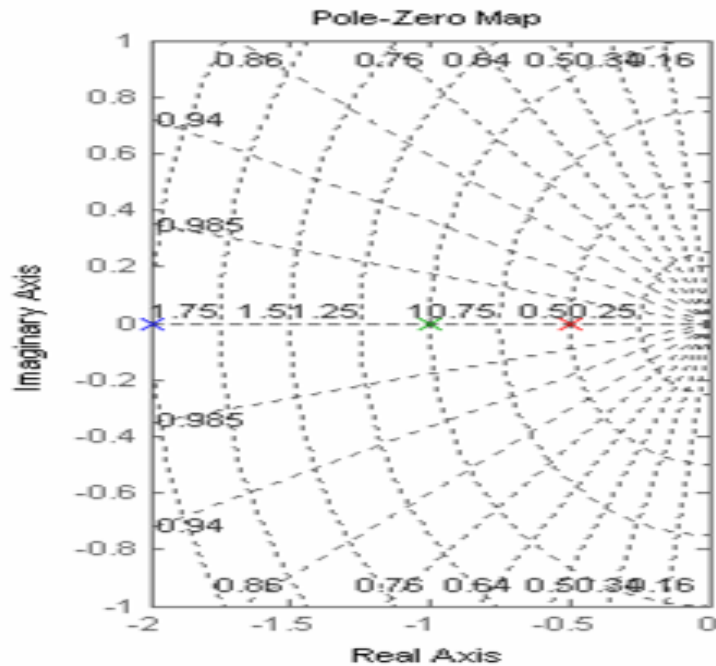
$$\frac{Y(p)}{U(p)} = G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_0 + b_1 p}{a_0 + a_1 p}$$

- Est d'ordre 1
- Est strictement propre si  $b_1=0$
- Est propre si  $b_1 \neq 0$
- Le pôle du système est  $p=-a_0/a_1$
- Le zéro du système est  $z=-b_0/b_1$

## Etude d'un système du premier ordre stable

Etudions la réponse à un échelon d'un système du premier ordre de la forme:

$$G(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{p_i}} \quad \text{pour } p_i = \{0.5, 0.7, 2\}$$



**On observe que :**

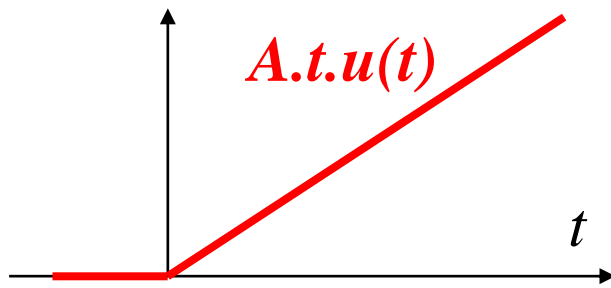
- Tous les pôles du système sont négatifs.
- Le système est stable (dans le sens entrée bornée / sortie bornée).
- Le système est d'autant plus rapide que le pôle est grand en valeur absolue.





# Transformées de Laplace de fonctions usuelles

## Rampe :



Droite de pente A

$$\mathcal{L}[A.t.u(t)] = \frac{A}{p^2}$$

La rampe est la primitive de l'échelon

# Transformée inverse de Laplace

## Décomposition en éléments simples :

*Exemple :*

pôles réels

pôles complexes

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} =$$

# Transformée inverse de Laplace

## Décomposition en éléments simples :

*Exemple :*

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

Pour A : multiplier l'équation par  $p$  puis faire  $p = 0$ .

$$p \cdot \frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = p \cdot \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2} \right)$$

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = A + p \cdot \left( \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2} \right)$$

$$\frac{5}{2} = A$$

# Transformée inverse de Laplace

## Décomposition en éléments simples :

*Exemple :*

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

Pour C : Multiplier par  $(p+1)^2$  puis  $p = -1$  .

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.\cancel{(p+1)^2}(p^2 + 2p + 2)} = (p+1)^2 \cdot \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2} \right) + C$$

$$\frac{(-1)^2 + 3.(-1) + 5}{(-1).(((-1)^2 + 2(-1) + 2))} = C$$

$$-3 = C$$

# Transformée inverse de Laplace

## Décomposition en éléments simples :

*Exemple :*

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

Pour  $D$  et  $E$  : Multiplier par  $p^2+2p+2$  puis  $p =$  une des racines complexes et identification partie réelle et imaginaire.

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2} = \left( \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} \right) \cdot \cancel{(p^2 + 2p + 2)} + D.p + E$$

Racine de  $p^2+2p+2$  :  $\Delta=2^2-4*2 = -4 \Rightarrow$  Une racine:  $p = \frac{-2 \pm i.2}{2} = -1 + i$

$$\frac{(-1+i)^2 + 3.(-1+i) + 5}{(-1+i).(i)^2} = D.(-1+i) + E = \frac{(2+i).(1+i)}{(1-i).(1+i)}$$

$$\frac{1+3.i}{2} = -D + E + D.i \quad D = \frac{3}{2} \quad E = \frac{1}{2} + D = 2$$

# Transformée inverse de Laplace

## Décomposition en éléments simples :

*Exemple :*

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

Pour  $B$  : Multiplier par  $p$  puis faire  $p \rightarrow +\infty$  .

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{\cancel{p}.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A.p}{p} + \frac{B.p}{p+1} + \frac{C.p}{(p+1)^2} + \frac{D.p^2 + E.p}{p^2 + 2.p + 2}$$

$$p \rightarrow +\infty : \quad \frac{p^2}{p^2.p^2} = \frac{A.p}{p} + \frac{B.p}{p} + \frac{C.p}{p^2} + \frac{D.p^2}{p^2}$$

$$0 = A + B + 0 + D$$

$$B = -4$$

# Transformée inverse de Laplace

## Décomposition en éléments simples :

*Exemple :*

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

*On a donc déterminé A, B, C, D et E.*

*Cherchons maintenant les transformées inverses de chaque élément simple !*

# Transformée inverse de Laplace

## Transformées inverses de chaque élément simple :

Exemple :

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

$$\frac{A}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A$$

$$\frac{B}{p+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} B.e^{-t}$$

$$\frac{C}{(p+1)^2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} C.t.e^{-t}$$

ANNEXE A1 : TABLEAU DES TRANSFORMÉES LAPLACE DES FONCTIONS USUELLES

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
Échelon (fonction constante) : $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe : $t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^{n-1}.u(t)$	$\frac{(n-1)!}{p^n}$
$e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^{n-1}.e^{-at}.u(t)$	$\frac{(n-1)!}{(p+a)^n}$
$\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at}.\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\text{sh}(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch}(\omega.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$



# Transformée inverse de Laplace

## Transformées inverses de chaque élément simple :

Exemple :

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p+1} + \frac{C}{(p+1)^2} + \frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2}$$

$$\frac{D.p + E}{p^2 + 2.p + 2} = \frac{D.(p+1)}{(p+1)^2 + 1} + \frac{-D + E}{(p+1)^2 + 1}$$

$$\frac{D.(p+1)}{(p+1)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} D.e^{-t}.\cos(t)$$

$$\frac{-D + E}{(p+1)^2 + 1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} (-D + E).e^{-t}.\sin(t)$$

ANNEXE A1 : TABLEAU DES TRANSFORMÉES LAPLACE DES FONCTIONS USUELLES

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$	$F(p) = \mathcal{L}(f(t))$
Impulsion de Dirac : $\delta(t)$	1
Échelon (fonction constante) : $u(t)$	$\frac{1}{p}$
Rampe : $t.u(t)$	$\frac{1}{p^2}$
$t^{n-1}.u(t)$	$\frac{(n-1)!}{p^n}$
$e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$t.e^{-at}.u(t)$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^{n-1}.e^{-at}.u(t)$	$\frac{(n-1)!}{(p+a)^n}$
$\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at}.\sin(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}.\cos(\omega.t).u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$
$\text{sh}(\omega.t).u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch}(\omega.t).u(t)$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$

# Transformée inverse de Laplace

Transformées inverses de chaque élément simple :

*Exemple : Au final :*

$$\frac{p^2 + 3.p + 5}{p.(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)}$$

$\mathcal{L}^{-1}$

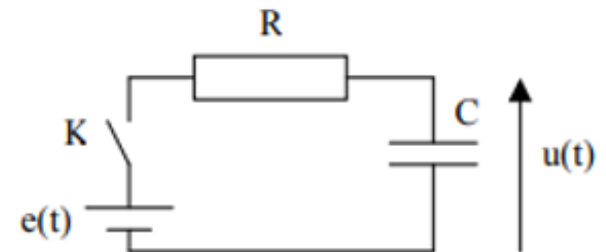
$$\left( A + B.e^{-t} + C.t.e^{-t} + D.e^{-t}.\cos(t) + (-D + E).e^{-t}.\sin(t) \right).u(t)$$

$$\text{avec } A=5/2, B=-4, C=-3, D=3/2, E=2$$

# Réponse à un échelon système 1er ordre

□ On considère un circuit électrique RC, dont le condensateur est déchargé. A  $t=0$  on ferme l'interrupteur

- L'allure de la tension peut être déterminée
  - ✓  $e(t) = Ri(t) + u(t)$  où  $i(t) = Cdu(t)/dt$
  - ✓  $e(t) = RCdu(t)/dt + u(t)$  avec  $e(t) = 5V$  (cte)  $\Rightarrow E(p) = 5/p$

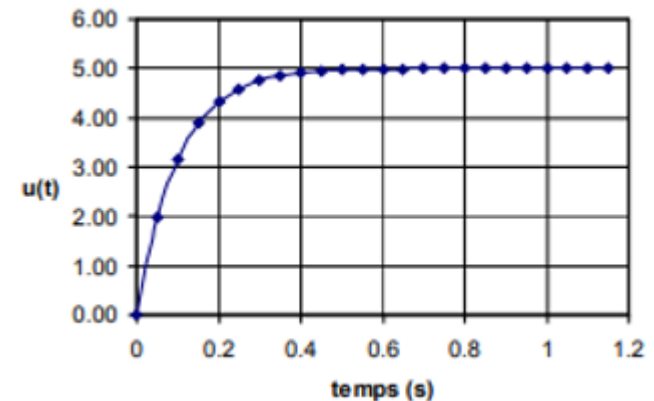


- par la transformée de Laplace on a
  - ✓  $E(p) = RCpU(p) + U(p)$

- ✓ 
$$U(p) = E(p) \cdot \frac{1}{(1 + RC \cdot p)} = \frac{5}{p \cdot (1 + RC \cdot p)}$$

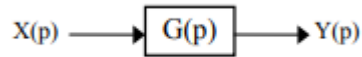
- par la transformée de Laplace inverse on obtient :

- ✓ 
$$u(t) = 5 \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$



# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

□ On considère la fonction de transfert



✓ Où

$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

- $k$  est le gain statique du système
- $\tau$  est la constante de temps  $> 0$ , elle caractérise la vitesse d'évolution de la sortie  $y(t)$

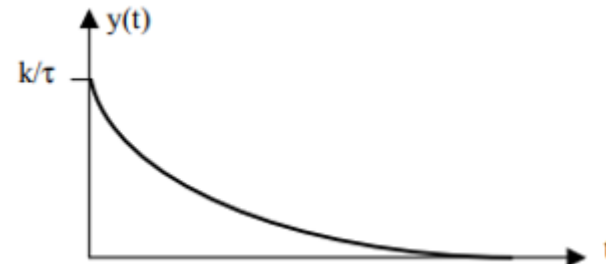
✓ Réponse impulsionnelle : entrée de type Dirac,  $x(t) = \delta(t)$

- Donne d'après Laplace la relation

$$Y(p) = X(p).G(p) = 1 \times \frac{k}{1 + \tau.p} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

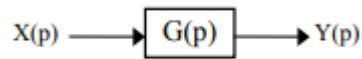
- et le Laplacien inverse donne la réponse temporelle suivante :

$$s(t) = \frac{k}{\tau} . e^{-\frac{t}{\tau}}$$



# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

- ✓ Réponse indicielle:  $x(t) = u(t) = 1$



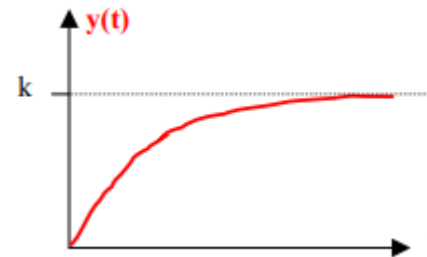
$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

- On a d'après Laplace la relation

$$Y(p) = X(p).G(p) = \frac{1}{p} \times \frac{k}{1 + \tau.p} = \frac{k}{p.(1 + \tau.p)}$$

- et le Laplacien inverse donne la réponse temporelle suivante :

$$y(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

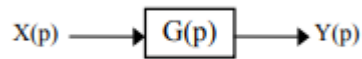


$t =$	$y(t) =$
$\tau$	$0,63.k$
$3 \times \tau$	$0,95.k$
$5 \times \tau$	$0,99.k$

Temps de réponse à 5% :  
 $Tr_{5\%} = 3.\tau$

# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

- ✓ Réponse en vitesse :  $x(t) = t \times u(t) = 1$



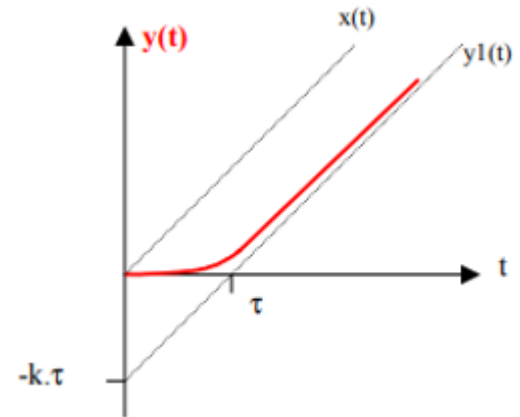
$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

- On a d'après Laplace la relation

$$Y(p) = X(p).G(p) = \frac{1}{p^2} \times \frac{k}{1 + \tau.p} = \frac{k}{p^2.(1 + \tau.p)}$$

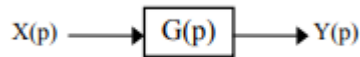
- et le Laplacien inverse donne la réponse temporelle suivante :

$$y(t) = k \left( t - \tau + \tau.e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

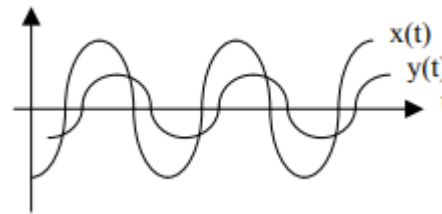


# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

- ✓ Réponse harmonique :  $x(t) = \cos(\omega.t)$



$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

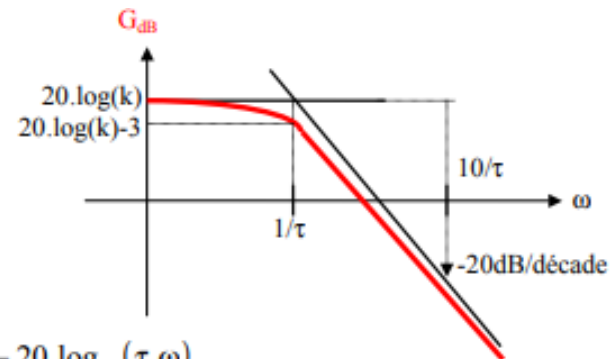


## □ Étude asymptotique du gain

L'expression précédente se met sous la forme:

$$G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 10.\log_{10}(1 + \tau^2.\omega^2)$$

- 1<sup>er</sup> cas: si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $G_{dB} \approx 20.\log_{10}(k)$
- 2<sup>eme</sup> cas: si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 20.\log_{10}(\tau.\omega)$
- 3<sup>eme</sup> cas: si  $\omega = 1/\tau$  alors  $G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 3$
- 4<sup>eme</sup> cas: si  $\omega = 10/\tau$  alors  $G_{dB} = 20.\log_{10}(k) - 20$



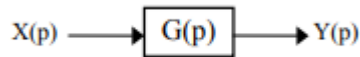
Fréquence de  
Coupure :  $\omega = 1/\tau$

## □ Étude théorique de la phase

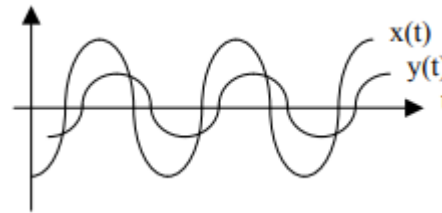
$$\varphi = \text{Arg}(G(j.\omega)) \quad \text{avec} \quad G(j.\omega) = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega}$$

# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

- ✓ Réponse harmonique :  $x(t) = \cos(\omega.t)$



$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$

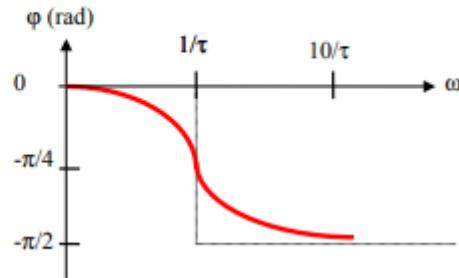


## □ Étude asymptotique de la phase

1<sup>er</sup> cas: si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $\varphi \rightarrow 0$

2<sup>ème</sup> cas: si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

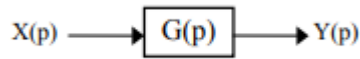
3<sup>ème</sup> cas: si  $\omega = 1/\tau$  alors  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$



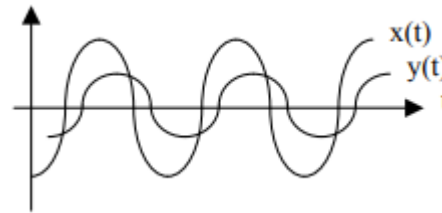


# Cas général : Système du 1<sup>er</sup> ordre

✓ Réponse harmonique :  $x(t) = \cos(\omega.t)$



$$G(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{k}{1 + \tau.p}$$



## 7. Lieu de Nyquist

$$G(j.\omega) = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega} = \frac{k}{1 + j.\tau.\omega} \times \frac{1 - j.\tau.\omega}{1 - j.\tau.\omega}$$

on a alors:

$$X = \operatorname{Re}[G(j.\omega)] = \frac{k}{1 + \tau^2.\omega^2}$$

$$Y = \operatorname{Im}[G(j.\omega)] = \frac{-k.\tau.\omega}{1 + \tau^2.\omega^2}$$

si  $\omega \rightarrow 0$  alors  $X = k$  et  $Y = 0$

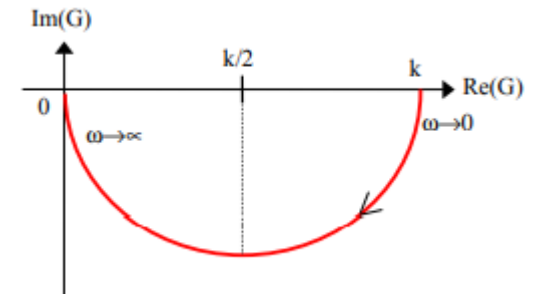
si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $X = 0$  et  $Y = 0$

on a:  $\frac{Y}{X} = -\omega.\tau$  d'où :  $X = \frac{k}{1 + \frac{Y^2}{X^2}} = \frac{k.X^2}{X^2 + Y^2}$

L'équation devient alors:  $X^2 + Y^2 = k.X$  ou encore:

$$\left(X - \frac{k}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$$

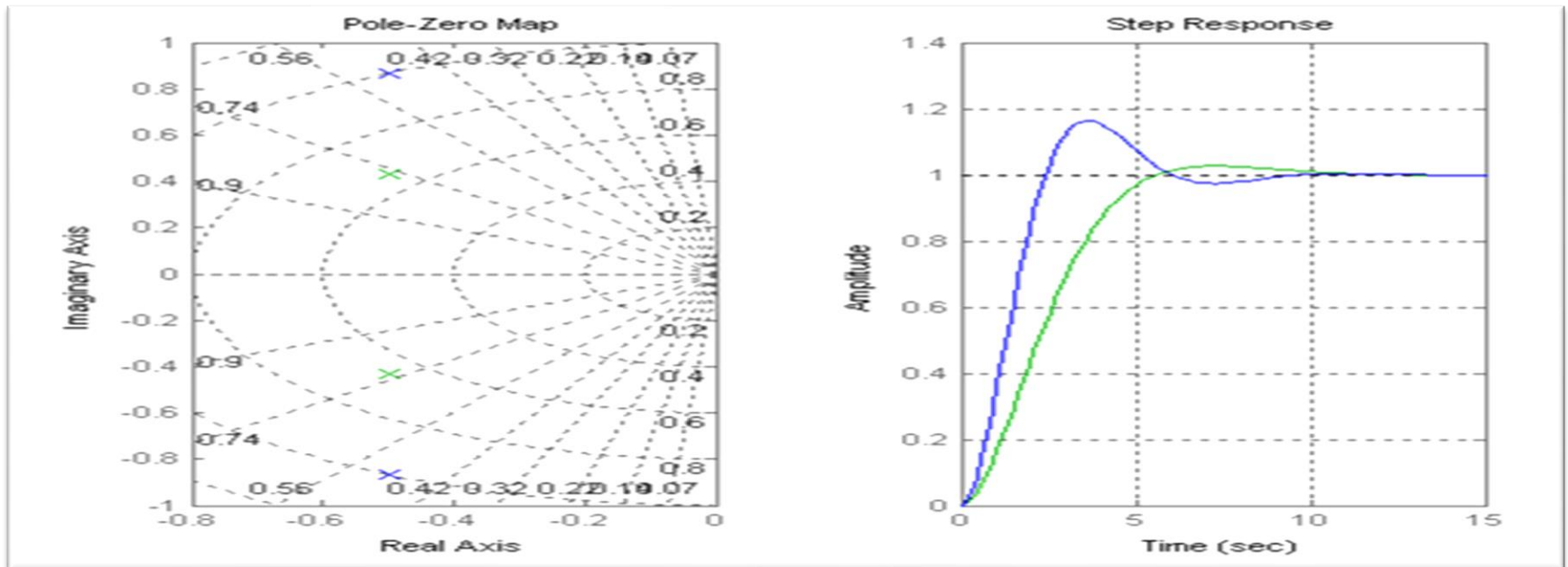
C'est l'équation d'un cercle de rayon  $k/2$  centré en  $(k/2; 0)$ . Le lieu de Nyquist correspondant est donc le demi-cercle inférieur (car  $\omega$  est positif).



# Réponse à un échelon système 2<sup>ème</sup> ordre

□ Système du second ordre :  $G(p) = \frac{c}{(p^2 + p + c)}$

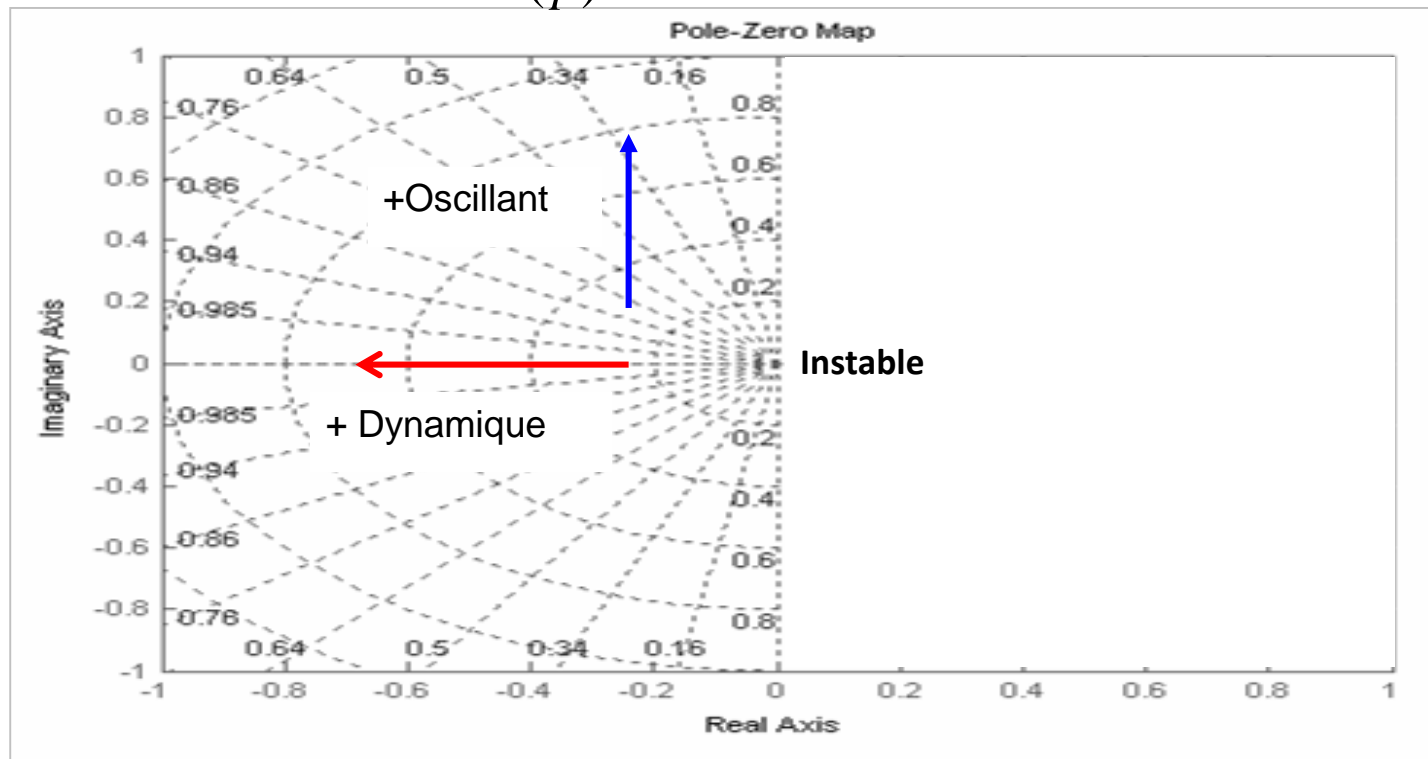
- Cas 1 pour  $c=1 \rightarrow$  Pôles  $-0.5 \pm 0.866i$
- Cas 2 pour  $c=0.4375 \rightarrow$  Pôles  $-0.5 \pm 0.433i$



# Domaine de stabilité

- Un système est stable si et seulement si les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative :

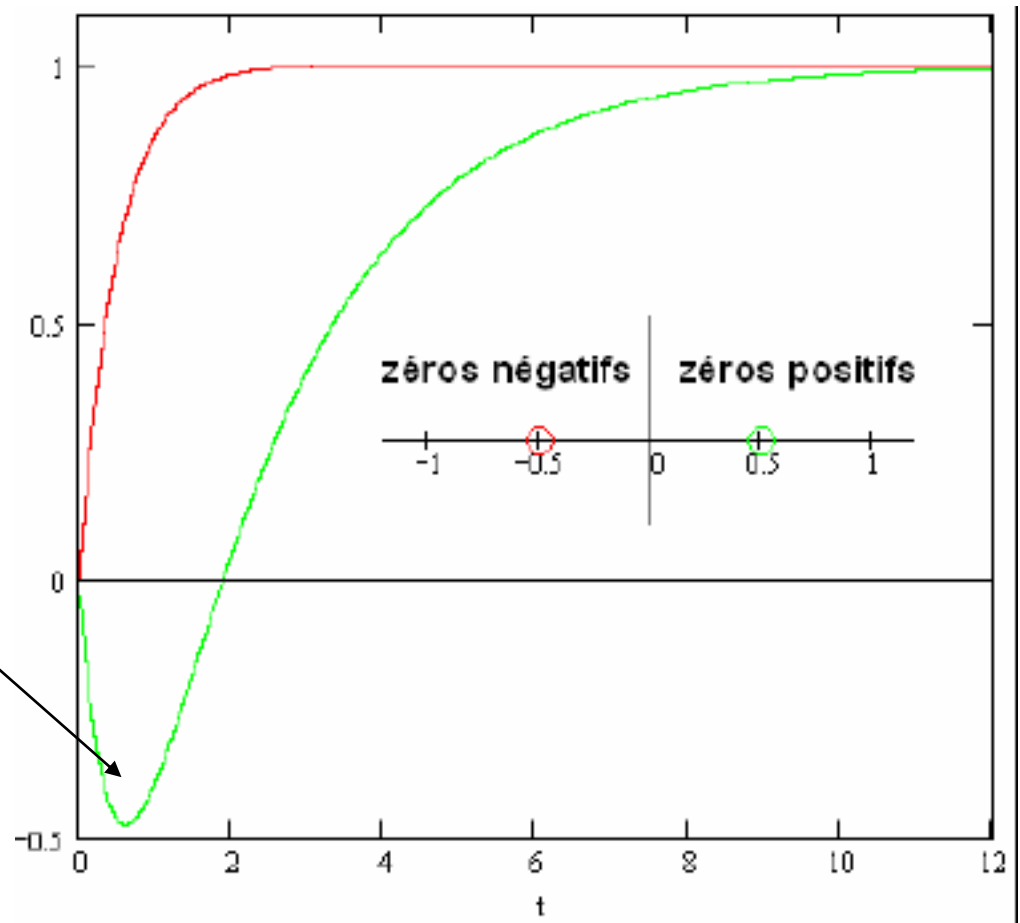
$$G(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \text{ est stable } \Leftrightarrow \{ \forall p / A(p) = 0 \rightarrow \Re(p) < 0 \}$$



# Influence des zéros

- Un système qui a un zéro à partie réelle positive est un système à non minimum de phase

Influence d'un zéros  
dans le demi plan droit



# Matlab : Création du système

□ Fonction : tf

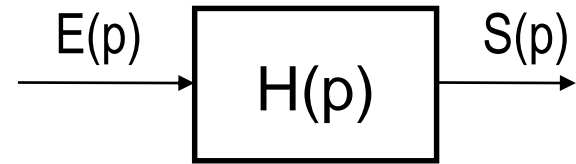
$$G(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)}$$

```
>> B=1 ;  
>> A=[1 1 1] ;  
>> tf(B,A)  
  
Transfer function:  
      1  
-----  
s^2 + s + 1  
  
>> pzmap(B,A);
```

# Etude temporelle d'un 2<sup>e</sup> ordre

Systeme du 2<sup>e</sup> ordre (forme canonique) :

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$



avec :  $\omega_0$  : pulsation propre non amortie (unité :  $\text{rad.s}^{-1}$ ) ;

$\xi$  : (« xi ») coefficient d'amortissement (sans unité)  
(on emploie aussi les notations  $z$  ou  $m$ ) ;

$K$  : gain statique (unité :  $[\text{s}] / [\text{e}]$  ).

# Réponse indicielle : 2<sup>ème</sup> ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Entrée :  $e(t) = E_0 \cdot u(t)$

On applique la transformée de Laplace :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1} \cdot \frac{E_0}{p}$$

Cette expression n'est pas disponible dans le tableau des transformées de Laplace. La transformée de Laplace inverse nécessite au préalable une décomposition en éléments simples.

$$\left( \frac{1}{\omega_0^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot \xi}{\omega_0} \cdot p + 1 \right) \cdot p = 0$$

On trouve  $p=0$  ainsi que les racines du polynôme qui dépendent du signe  $\Delta = 4 \cdot \frac{(\xi^2 - 1)}{\omega_0^2}$

On distingue les trois cas :

- Si l'amortissement est faible ( $\xi < 1$ ), alors  $\Delta < 0$  et il y a deux racines imaginaires distinctes
- Si l'amortissement est critique ( $\xi = 1$ ), alors  $\Delta = 0$  et il y a une racine réelle double
- Si l'amortissement est important ( $\xi > 1$ ), alors  $\Delta > 0$  et il y a deux racines réelles distinctes

# Régime apériodique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

Lorsque l'amortissement est fort,  $\xi > 1$ , la réponse est amortie (régime apériodique).

Dans le cas où  $\xi > 1$ , le dénominateur possède deux racines réelles :

$$p = -\xi \cdot \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Sachant que  $\xi$  et  $\omega_0$  sont positifs, on vérifie que les deux pôles sont à partie réelle négative ce qui assure un comportement stable. La sortie peut s'écrire sous forme factorisée :

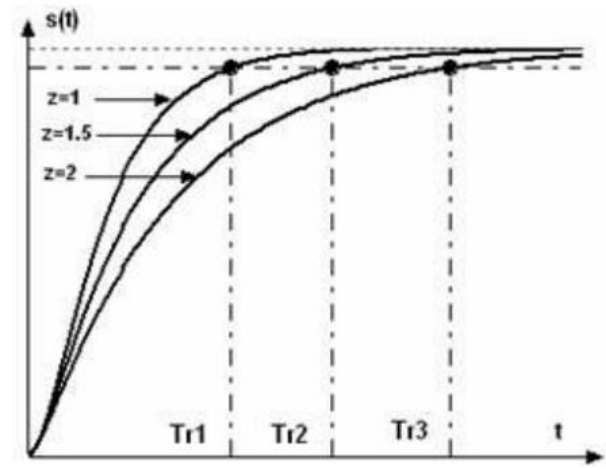
$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot p}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit sous la forme :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p - p_1)} + \frac{\gamma}{(p - p_2)}$$

La transformée de Laplace inverse s'obtient à l'aide du tableau des transformées de Laplace :

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot \left(1 - \frac{\omega_0}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}} \cdot \left(\frac{e^{p_2 \cdot t}}{p_2} - \frac{e^{p_1 \cdot t}}{p_1}\right)\right) \cdot u(t)$$



**Propriété 1 :** Les propriétés et tracés remarquables sont résumés

- Valeur à l'origine :  $s(0) = 0$
- Asymptote à l'infini :  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$
- La tangente à l'origine horizontale



# Régime aperiodique critique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$\xi = 1$ , l'équation caractéristique admet une racine double  $p = -\omega_0$

Cette valeur est négative, le système est donc stable. La sortie peut s'écrire sous la forme factorisée :

$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0}{(p + \omega_0)^2 \cdot p}$$

La décomposition en éléments simples s'écrit sous la forme

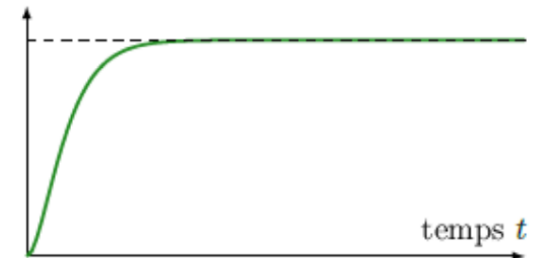
$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{(p + \omega_0)} + \frac{\gamma}{(p + \omega_0)^2}$$

La transformée de Laplace inverse s'obtient à partir du tableau des transformées de Laplace et des valeurs  $\alpha, \beta, \gamma$

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot u(t) \cdot (1 - (1 + t \cdot \omega_0) \cdot e^{-\omega_0 t})$$

**Propriété 2 :** Les propriétés et tracés remarquables sont résumés

- Valeur à l'origine :  $s(0) = 0$
- Asymptote à l'infini :  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$
- La tangente à l'origine horizontale



# Régime pseudo-périodique

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

$\xi < 1$ , le dénominateur possède deux racines complexes conjuguées

$$p = -\xi \cdot \omega_0 \pm i \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Les constantes  $\xi$  et  $\omega_0$  sont réelles et positives donc le système est stable car les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative.

La décomposition en éléments simples de seconde espèce donne

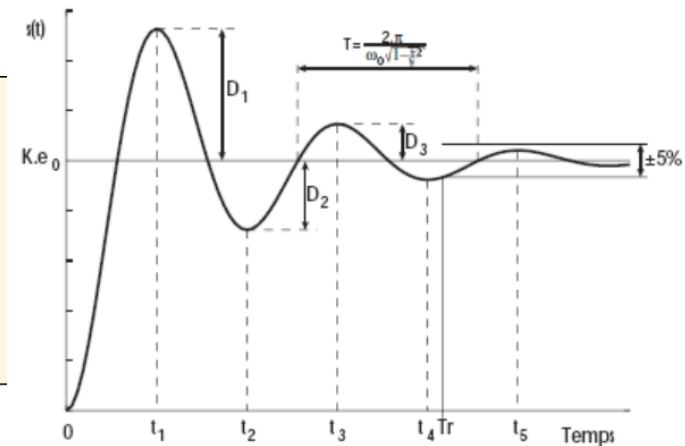
$$S(p) = \frac{K \cdot E_0 \cdot \omega_0^2}{(p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2) \cdot p} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta \cdot p + \gamma}{p^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 \cdot p + \omega_0^2}$$

On en déduit la réponse temporelle par application de la transformée inverse de Laplace

$$s(t) = K \cdot E_0 \cdot u(t) \cdot \left( 1 - e^{-\omega_0 \cdot \xi \cdot t} \cdot (\cos(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t) + \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cdot \sin(\omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} \cdot t)) \right)$$

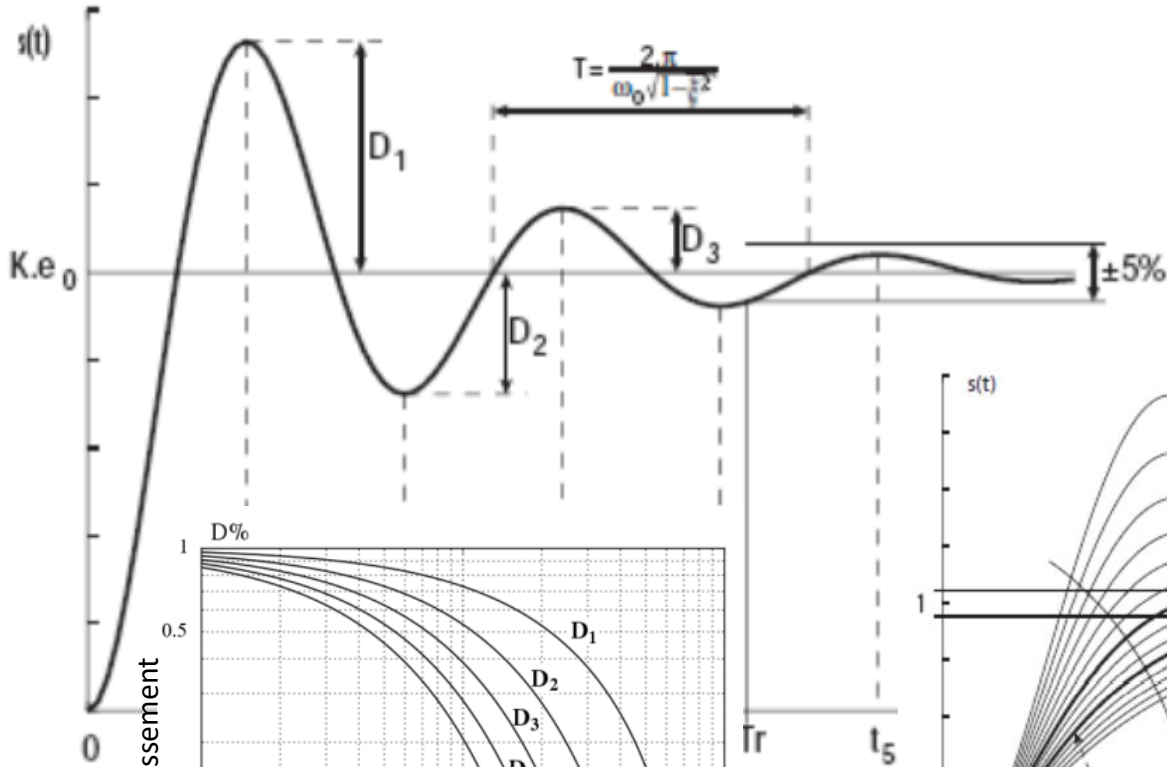
**Propriété 3 :** Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 3 :

- Fonction oscillante (partie sinusoïdale) qui représente donc des dépassements et amortie (exponentielle décroissante).
- Valeur à l'origine :  $s(0) = 0$
- Asymptote à l'infini :  $\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = K \cdot E_0$
- La tangente à l'origine horizontale

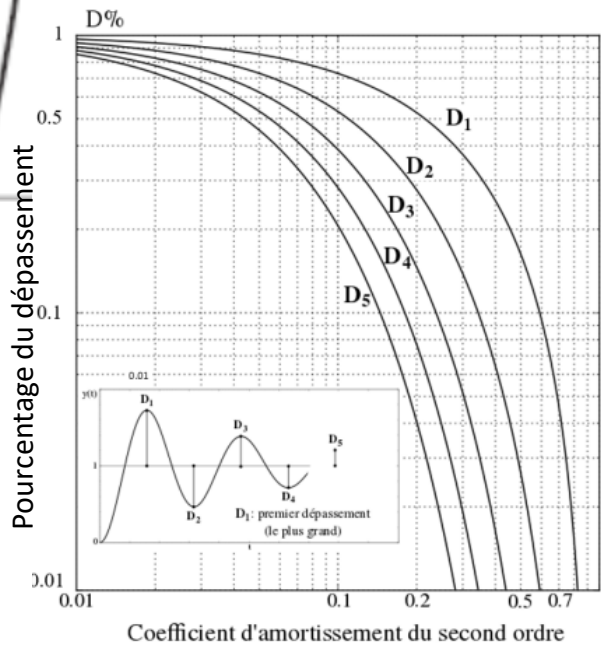


# Régime pseudo-périodique

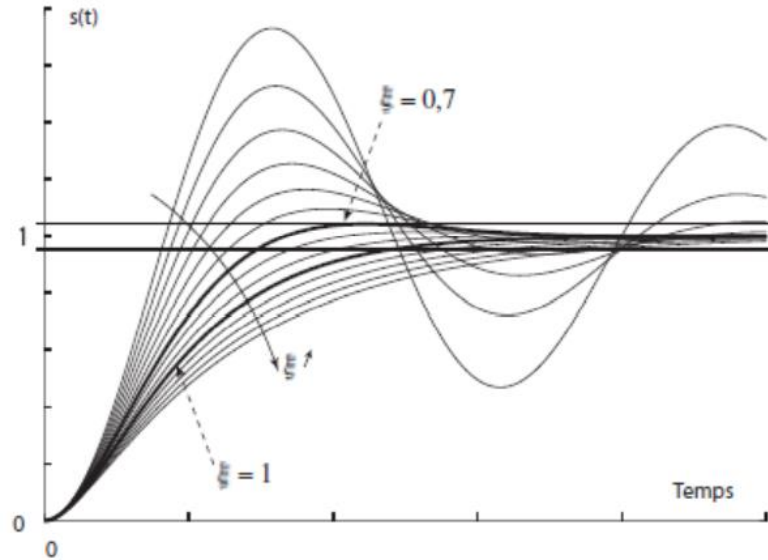
$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$



Abaque



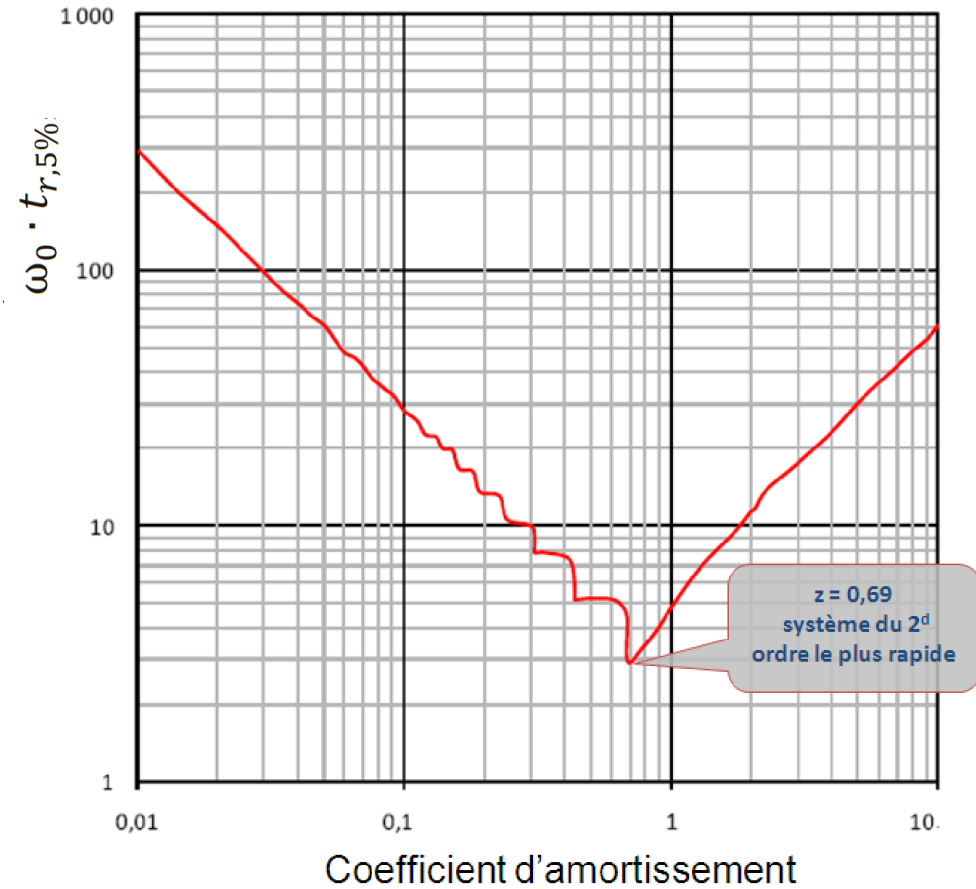
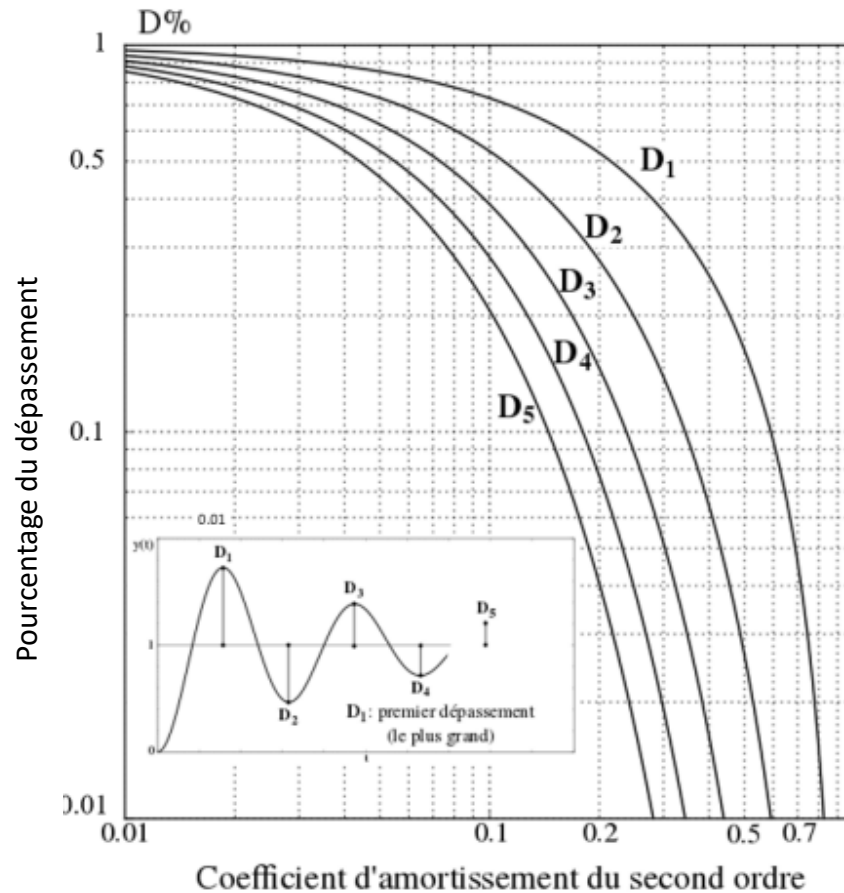
Réponse indicielle



Influence du coefficient d'amortissement sur la réponse temporelle d'un second ordre

# Abaques : Identification Sys 2<sup>ème</sup> ordre

$$H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

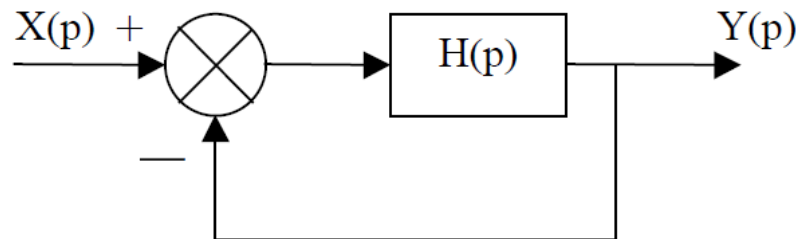


# Etudes des systèmes linéaires

## □ Définition :

- Un système est stable ssi la réponse du système tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers  $\infty$
- Un système est stable ssi les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative.

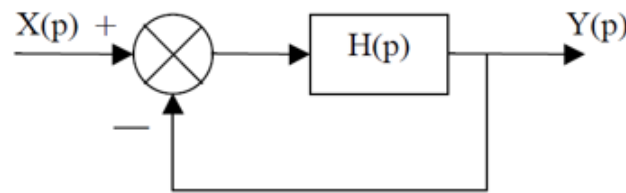
## □ Exercice : Ce système bouclé est -il stable ?



$$H(p) = \frac{1}{p \cdot (p+1)}$$

# Stabilité en boucle fermée (BF)

- Le système en BF est stable



$$H(p) = \frac{1}{p \cdot (p+1)}$$

- car sa transmittance en BF :

$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

- Présente des pôles à parties réelles négatives

$$p_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$$

# Lieux de Bode

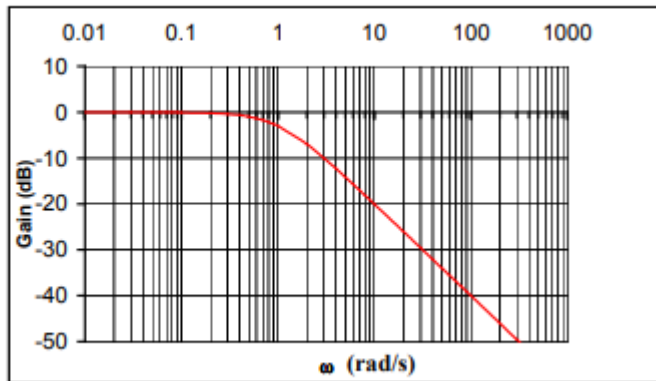
Le gain  $G$  et la phase  $\varphi$  sont décrits en fonction de la pulsation  $\omega=2\pi f$  et exprimés en échelle semi logarithmique. Le plan de Bode consiste donc à tracer deux diagrammes, un de phase et un de module.

Exemple :  $G(p) = \frac{1}{1+p}$

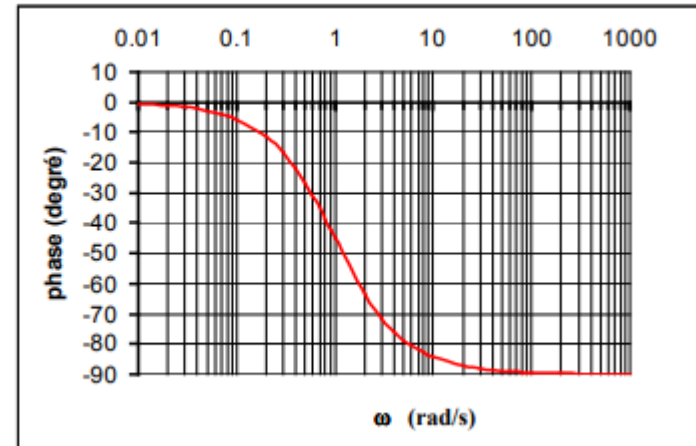
Gain :  $G = 20 \cdot \log_{10} |H(j.\omega)|$

Phase :  $\varphi = \arg(H(j.\omega))$

Courbe de Gain

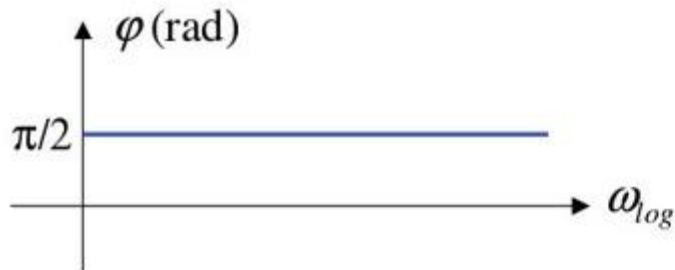
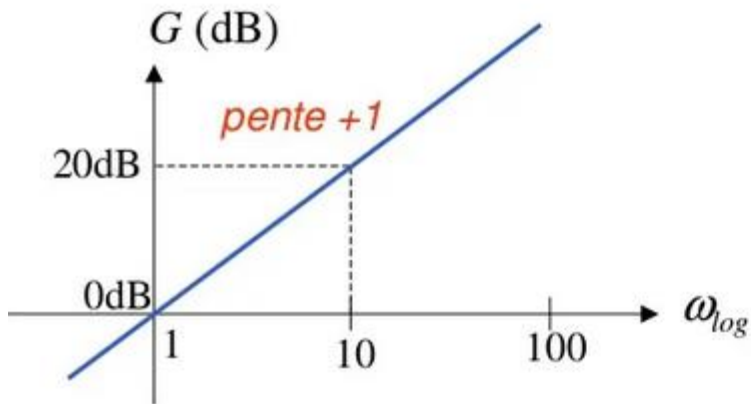


Courbe de phase

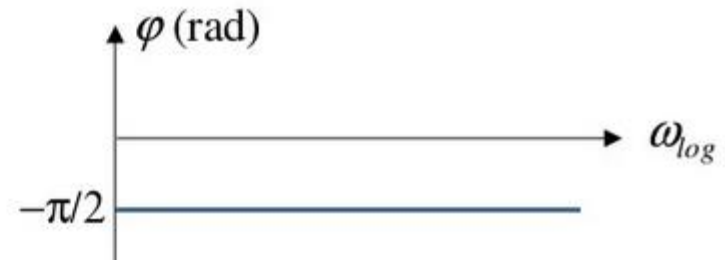
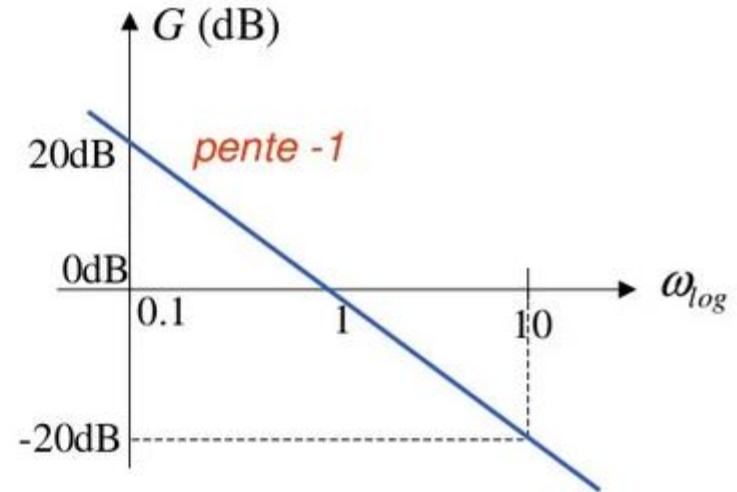


# Lieux de Bode

## □ Dérivation $p$



## □ Intégration $1/p$





# Lieux de Bode

□ Premier ordre  $H(s) = (1 + Ts)^{-1}$  ( $T > 0$ )

◆ Gain  $G = -10 \log_{10}(1 + \omega^2 T^2)$

➤  $\omega T \ll 1, G \approx 0$

asymptote *horizontale*

➤  $\omega T \gg 1, G \approx -20 \log_{10} \omega T$

asymptote de *pente -1*

Les deux asymptotes se coupent en  $\omega_c = \frac{1}{T}$

➤ A  $\omega = \omega_c$ , on a  $G = -3$ dB.  $\omega_c$  *pulsation de coupure* à 3dB

◆ Phase  $\varphi = -\arctan(\omega T)$

➤  $\omega T \ll 1, \varphi \approx 0$

➤  $\omega T \gg 1, \varphi \approx -\frac{\pi}{2}$

} *asymptotes horizontales*

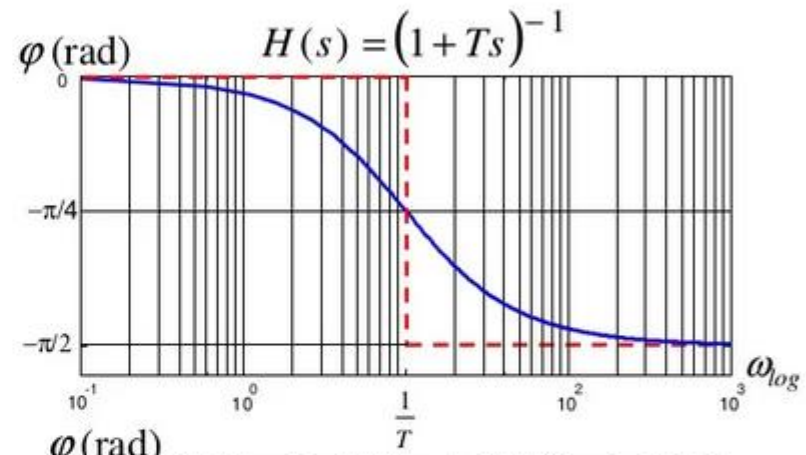
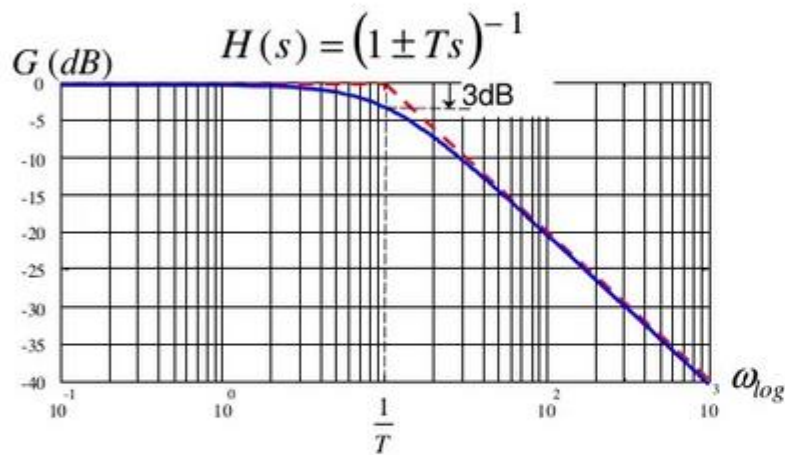
➤ A  $\omega = \omega_c$ , on a  $\varphi = -\frac{\pi}{4}$

# Lieux de Bode

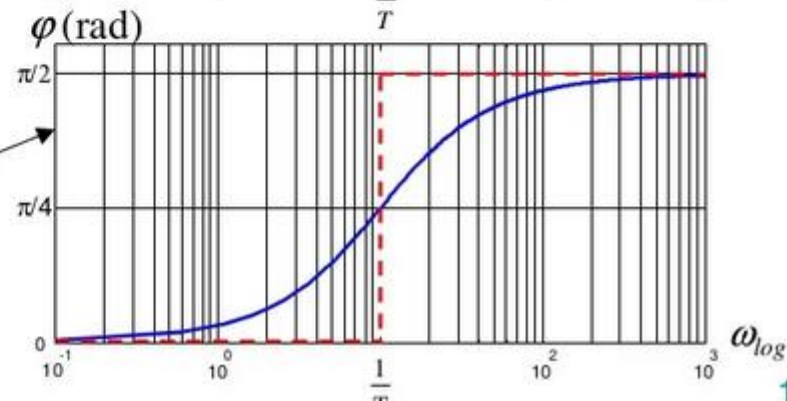
□ Premier ordre  $H(s) = (1 - Ts)^{-1}$  ( $T > 0$ )

$$G = -10 \log_{10}(1 + \omega^2 T^2) \text{ mais } \varphi = \arctan(\omega T)$$

La phase change de signe par rapport au cas précédent  $(1 + Ts)^{-1}$



$$H(s) = (1 - Ts)^{-1}$$



# Critères de stabilité

## □ Critères mathématiques

- Critère de Routh-Hurwitz
- Critère du lieu des racines

## □ Critère graphiques

- Critère de Nyquist
- Critère de Black-Nichols
- Critère dans le diagramme de Bode

# Critère de stabilité au sens de Routh

- On considère la fonction de transfert :
  - $H(p) = N(p)/D(p)$
  - où  $D(p) = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_0$  avec  $a_n > 0$
- Le tableau de Routh se construit ainsi

$p^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...	$a_0$
$p^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$		
$p^{n-2}$	$b_n = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2} - a_{n-3} \cdot a_n}{a_{n-1}}$	$b_{n-1} = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-4} - a_{n-5} \cdot a_n}{a_{n-1}}$			
$p^{n-3}$	$\frac{b_n \cdot a_{n-3} - a_{n-1} \cdot b_{n-1}}{b_n}$	$\frac{b_n \cdot a_{n-5} - a_{n-1} \cdot b_{n-2}}{b_n}$			
...	...	...			
$p^0$					

- **Critère** : un système est stable si tous les termes de la 1<sup>er</sup> colonne sont de même signe.

# Application du critère de Routh

□ On considère la fonction de transfert :

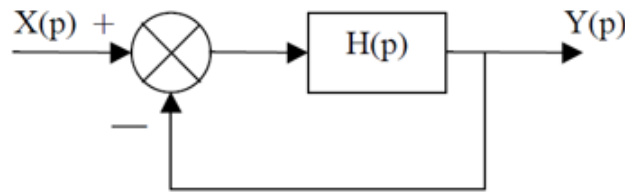
$$\frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{1}{p^2 + p + 1}$$

$p^2$	1	1
$p^1$	1	0
$p^0$	1	

**Conclusion** : Ce système est stable car tous les termes de la 1<sup>er</sup> colonne sont de même signe.

# Application du critère de Routh

## □ Exercice



$$H(p) = \frac{2.K}{p.(p+2)(p+3)}$$

- Déterminer le transfert de la BF :  $Y(p)/X(p)$
- Donner le tableau de Routh
- Conclure sur la valeur de  $K$  pour assurer la stabilité

# Application du critère de Routh

## □ Solution de l'exercice

- La fonction de transfert en BF vaut :

$$\frac{H(p)}{1+H(p)} = \frac{2K}{p^3 + 5.p^2 + 6.p + 2K}$$

- Le tableau de Routh est :
- Les conditions de stabilité sont

$$\begin{cases} \frac{30-2K}{5} > 0, \\ 2K > 0, \end{cases}$$

$p^3$	1	6	0
$p^2$	5	2K	0
$p^1$	$\frac{30-2K}{5}$	0	0
$p^0$	2K	0	0

- Soit  $0 < K < 15$

# Application du critère de Routh

## □ Cas particulier

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 2p^2 + 6p + 1$$

$p^4$	1	2	1
$p^3$	3	6	0
$p^2$	0	1	0
$p^1$	$\infty$	$\infty$	
$p^0$	-		

## □ Solution

$p^4$	1	2	1
$p^3$	3	6	0
$p^2$	$\varepsilon$	1	0
$p^1$	$\frac{6\varepsilon - 3}{\varepsilon}$	0	
$p^0$	1		

On remplace le terme nul par un  $\varepsilon$  positif et on poursuit la construction du tableau de Routh:

- Lorsque l'on fait tendre  $\varepsilon$  vers zéro par valeurs positives, on constate que  $6\varepsilon - 3$  tend vers -3.
- Le système est donc instable.



# Application du critère de Routh

## □ Cas particulier

$$D(p) = p^4 + 3p^3 + 4p^2 + 3p + 3$$

$p^4$	1	4	3
$p^3$	3	3	0
$p^2$	3	3	0
$p^1$	0	0	
$p^0$	-		

On se trouve dans le cas particulier où une ligne complète est nulle.

## □ Solution

$p^4$	1	4	3
$p^3$	3	3	0
$p^2$	3	3	0
$p^1$	6	0	
$p^0$	3		

- On pose le polynôme auxiliaire

$$P_{aux}(p) = 3p^2 + 3$$

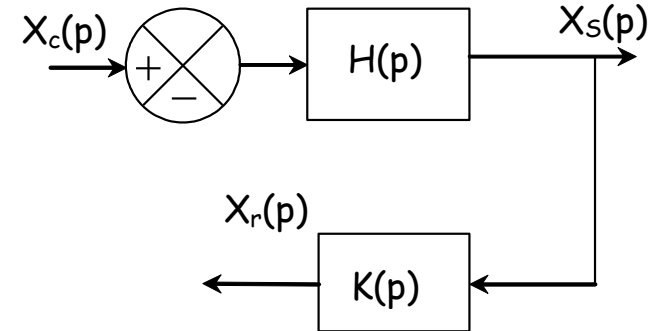
- On calcul sa dérivée par rapport à  $p$

$$\frac{dP_{aux}}{dp} = 6p$$

- Il reste à remplacer la ligne nulle par les coefficients de  $\frac{dP_{aux}}{dp} = 6p$

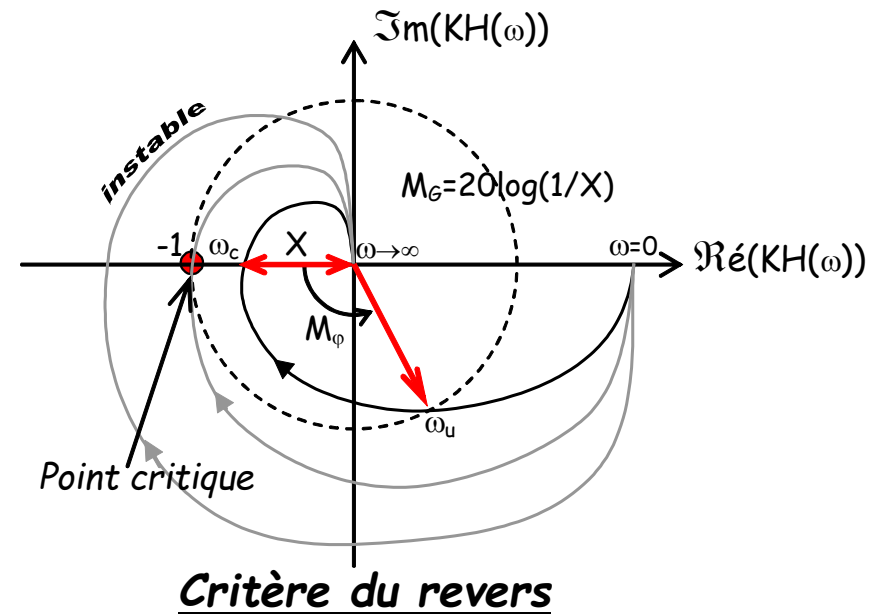
# Critère de Nyquist

Toutes les racines de  $1 + K(p)H(p) = 0$  ont une partie réelle strictement négative (système stable) si le diagramme de Nyquist de la B.O. n'entoure pas le point -1



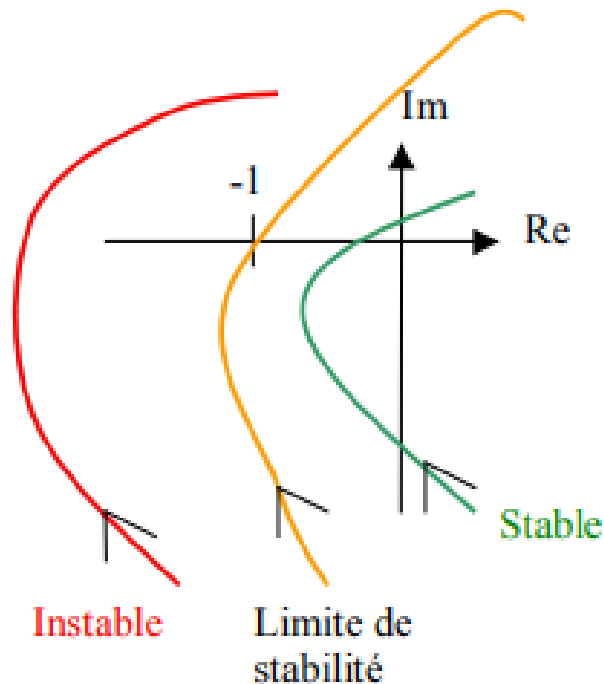
# Critère du Revers

Le système est stable en boucle fermée si le diagramme de Nyquist de la transmittance en B.O :  $K(p)H(p)$  laisse le point -1 sur sa gauche lorsque la pulsation  $\omega$  varie de  $0^+$  à l'infini.



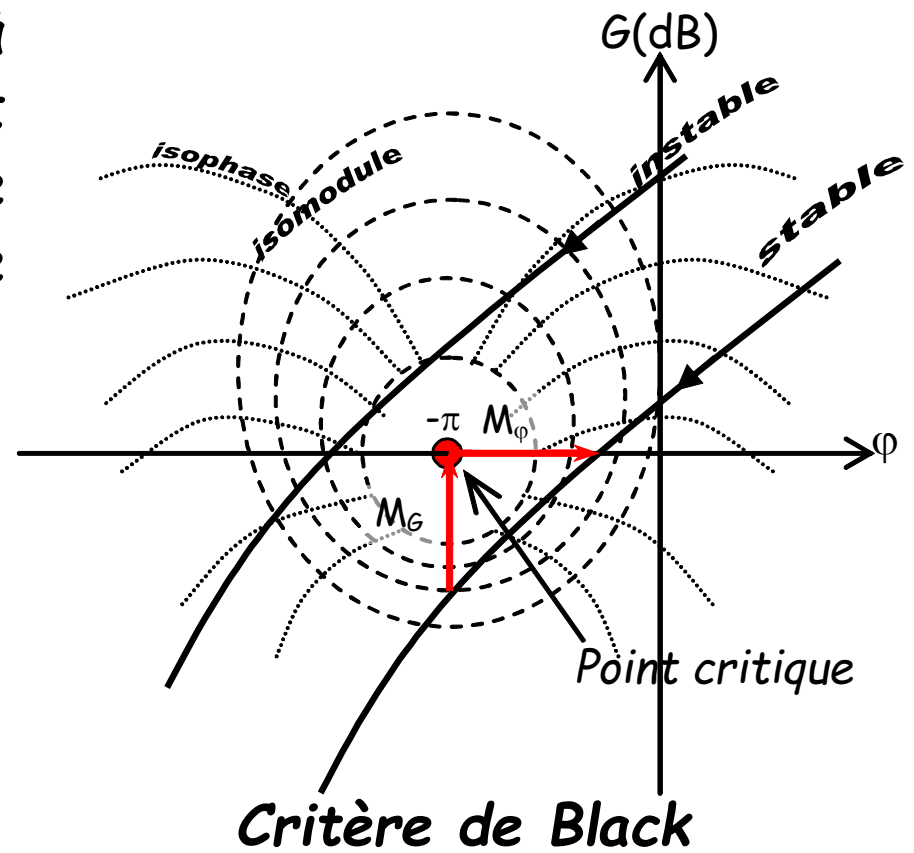
# Critère de Nyquist (Revers)

Un système sera stable si, en parcourant le lieu de transfert dans le sens des  $w$  croissants, on laisse le point critique  $(-1,0)$  sur la gauche.



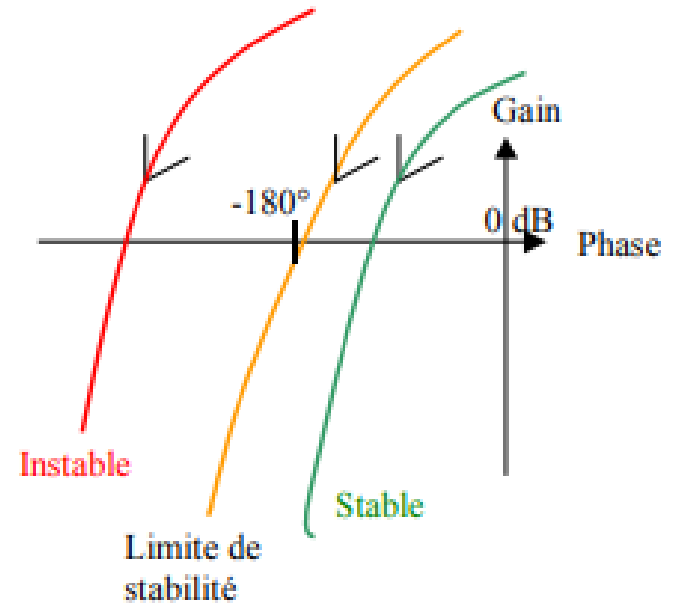
# Critère de Black Nichols (Revers)

Si on laisse le point critique à sa droite quand on décrit la courbe de  $T(j\omega)$  dans le sens des  $\omega$  croissants: le système est stable.



# Critère de Black Nichols (Revers)

Un système est stable si en parcourant le lieu de transfert dans le sens des  $w$  croissants, on laisse le point critique ( $-180^\circ$ ,  $0\text{db}$ ) sur la droite.



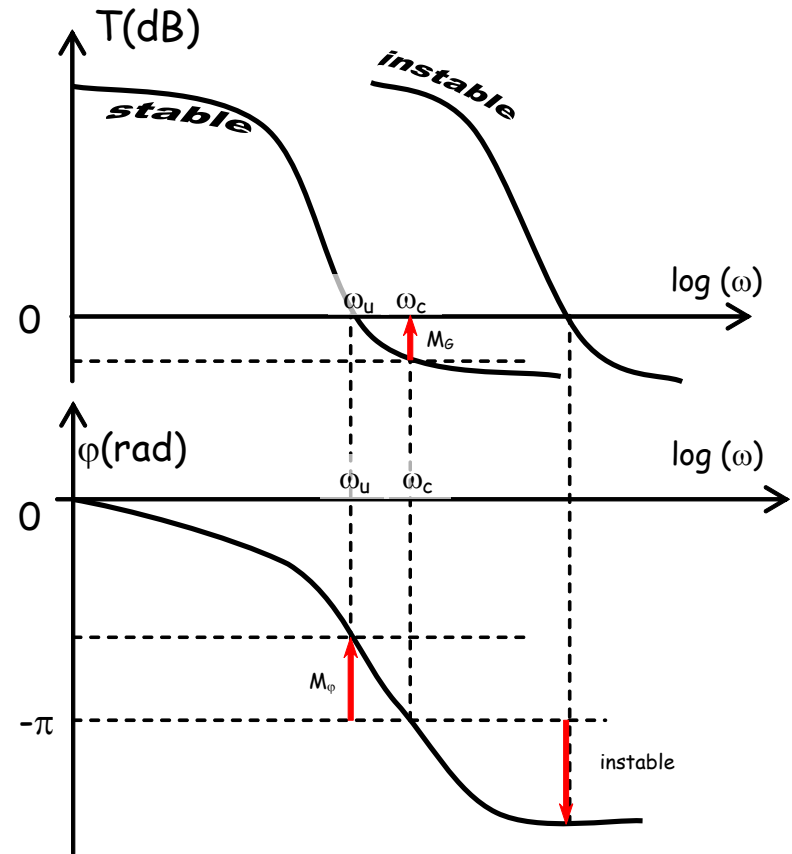
# Critères dans le diagramme de Bode (Revers)

$$1 + K(p) \times H(p) = 0 \Rightarrow 1 + T(p) = 0 \Rightarrow T(p) = -1 \begin{cases} T_{dB} = 20 \log T(p) = 0 \\ \text{Arg} T(p) = -\pi \end{cases}$$

- Pour la fréquence  $\omega_u$  pour laquelle  $T_{dB}(\omega_u) = 0$  si
  - $\varphi(\omega_u) > -\pi$ : stable
  - $\varphi(\omega_u) < -\pi$ : instable

*ou*

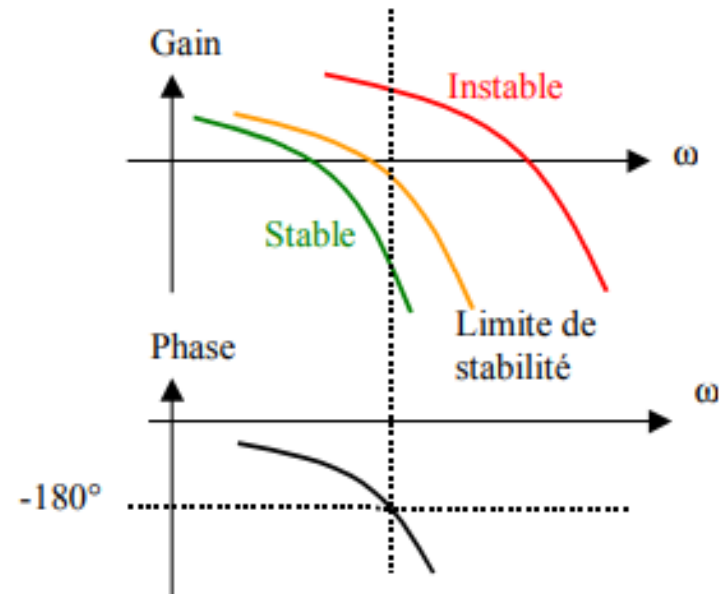
- Pour la fréquence  $\omega_c$  pour laquelle  $\text{Arg}(T) = -\pi$  si
  - $T(\omega_c) > 1$ : instable
  - $T(\omega_c) < 1$ : stable



Critère de Bode

## Critères dans le diagramme de Bode (Revers)

Un système est stable si, lorsque la courbe de phase par  $-180^\circ$ , la courbe de gain passe en dessous de 0 db.



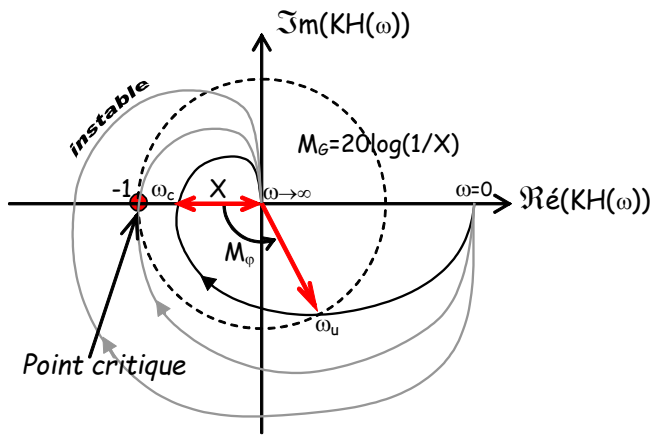
# Marges de Gain et de Phase

## Marge de phase (sur la boucle ouverte)

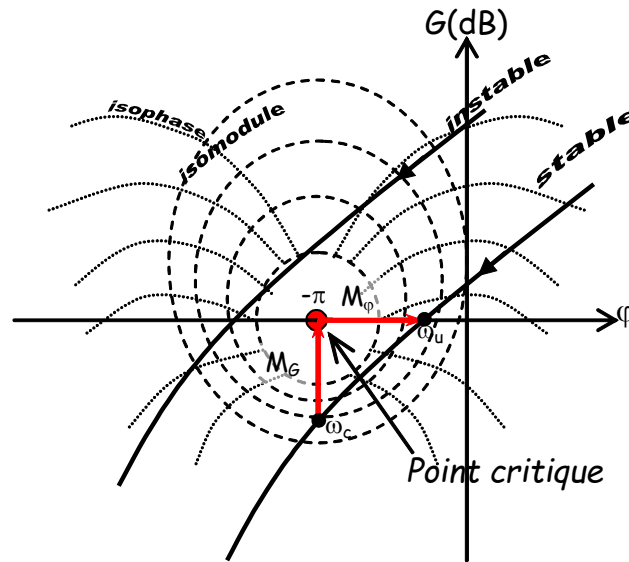
Déphasage supplémentaire qui ferait passer la courbe de l'autre côté du point critique. Valeur dont il faut augmenter  $\varphi$  pour  $KH = 1$  pour arriver au point critique.

## Marge de gain (sur la boucle ouverte)

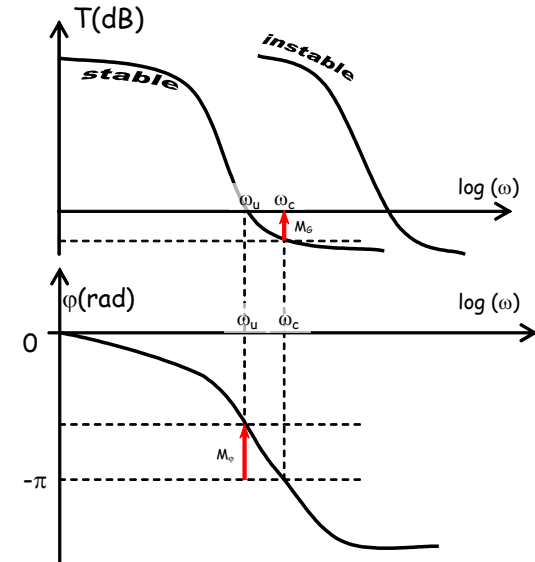
Nombre de dB dont on peut augmenter le gain sans provoquer l'instabilité. Valeur dont il faut augmenter  $KH$  lorsque  $\varphi = -180^\circ$  pour arriver au point critique.



Nyquist



Black Nichols



Bode



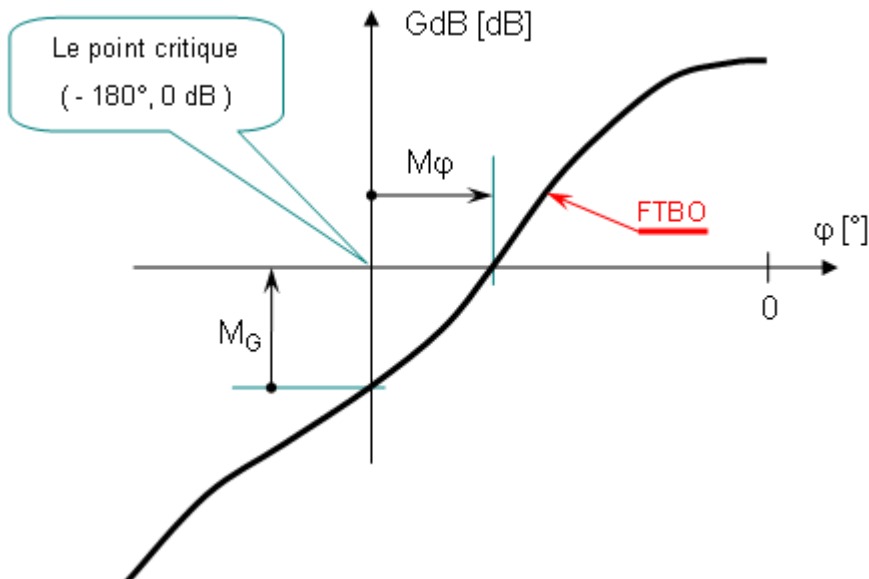
# Marges de Gain et de Phase

C'est l'écart entre le tracé de la représentation fréquentielle de la fonction de transfert et le point critique  $-1$  ( $0 \text{ dB}$ ,  $-180^\circ$ ), c'est-à-dire le degré de stabilité du système bouclé.

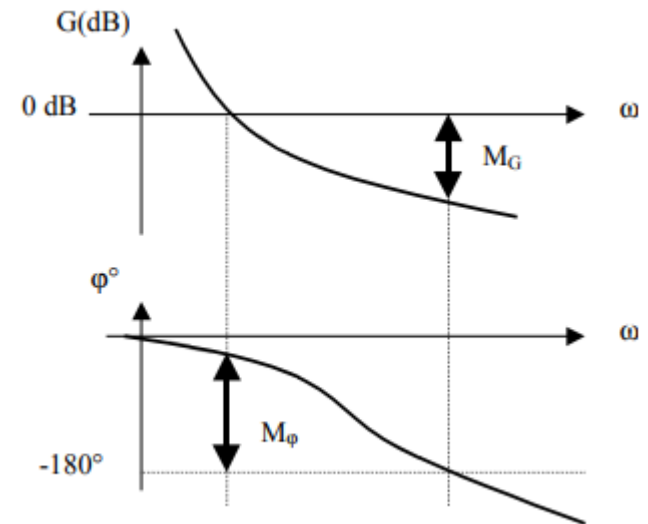
Marge de phase :  $M_\varphi = \varphi(\omega_1) + 180^\circ$  avec  $G(\omega_1) = 0$

Marge de gain :  $M_G = -G(\omega_2)$  avec  $\varphi(\omega_2) = -180^\circ$

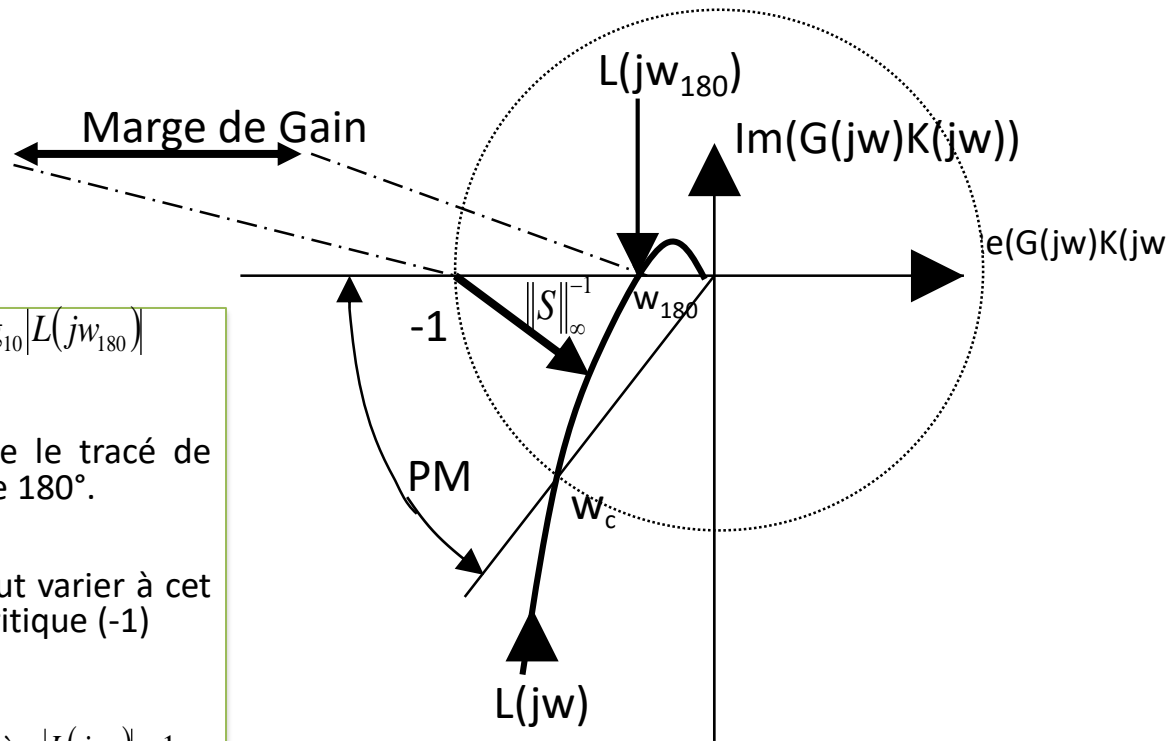
## Dans Black



## Dans Bode



# Dans Nyquist



□ Marge de gain en dB  $GM_{db} = -20 \log_{10} |L(jw_{180})|$

» où  $w_{180}$  est la pulsation à laquelle le tracé de Nyquist coupe le demi-axe de phase  $180^\circ$ .

» elle mesure de combien le gain peut varier à cet endroit avant de toucher le point critique (-1)

□ Marge de phase  $PM = \angle L(jw_c) + 180^\circ$  où  $|L(jw_c)| = 1$

» Elle mesure de combien la phase peut varier avant de rencontrer le point critique (-1)

□ Marge de module  $\|S\|_\infty^{-1}$

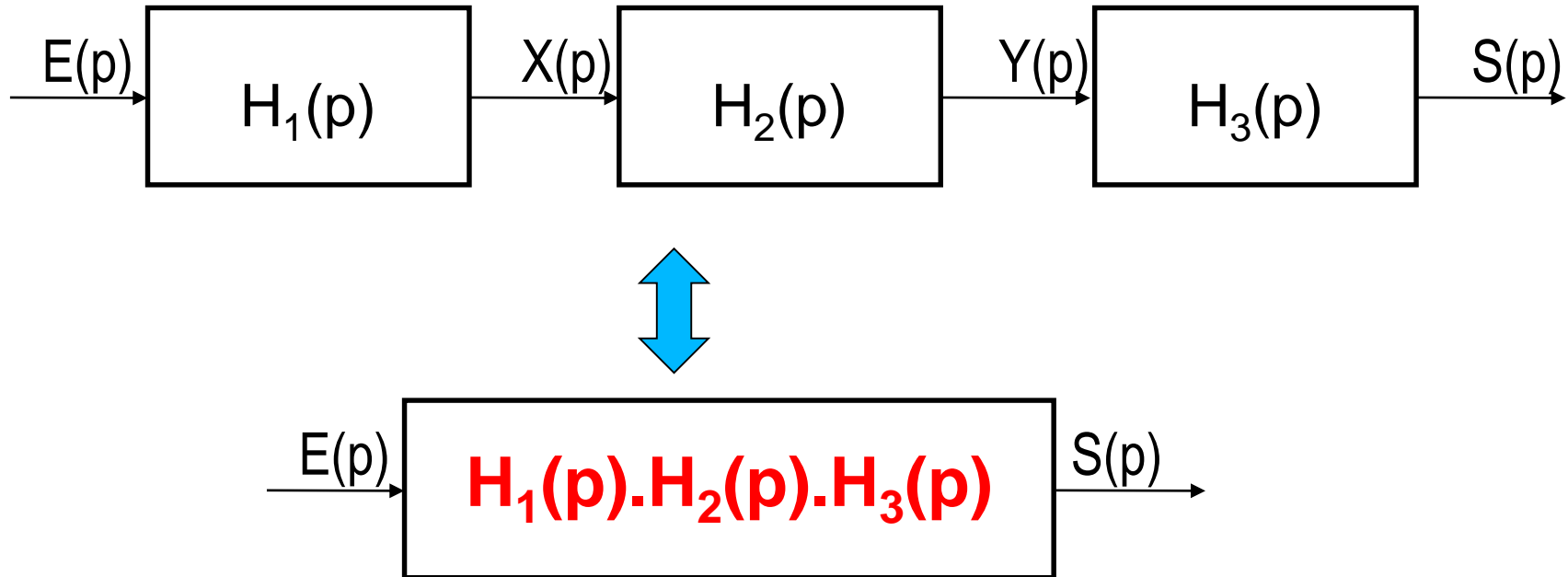
» Elle mesure la distance minimale du tracé de Nyquist au point critique

$$GM = \frac{1}{|L(jw_{180})|}$$

$$\text{où } \angle L(jw_{180}) = -180$$

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## Blocs en série :

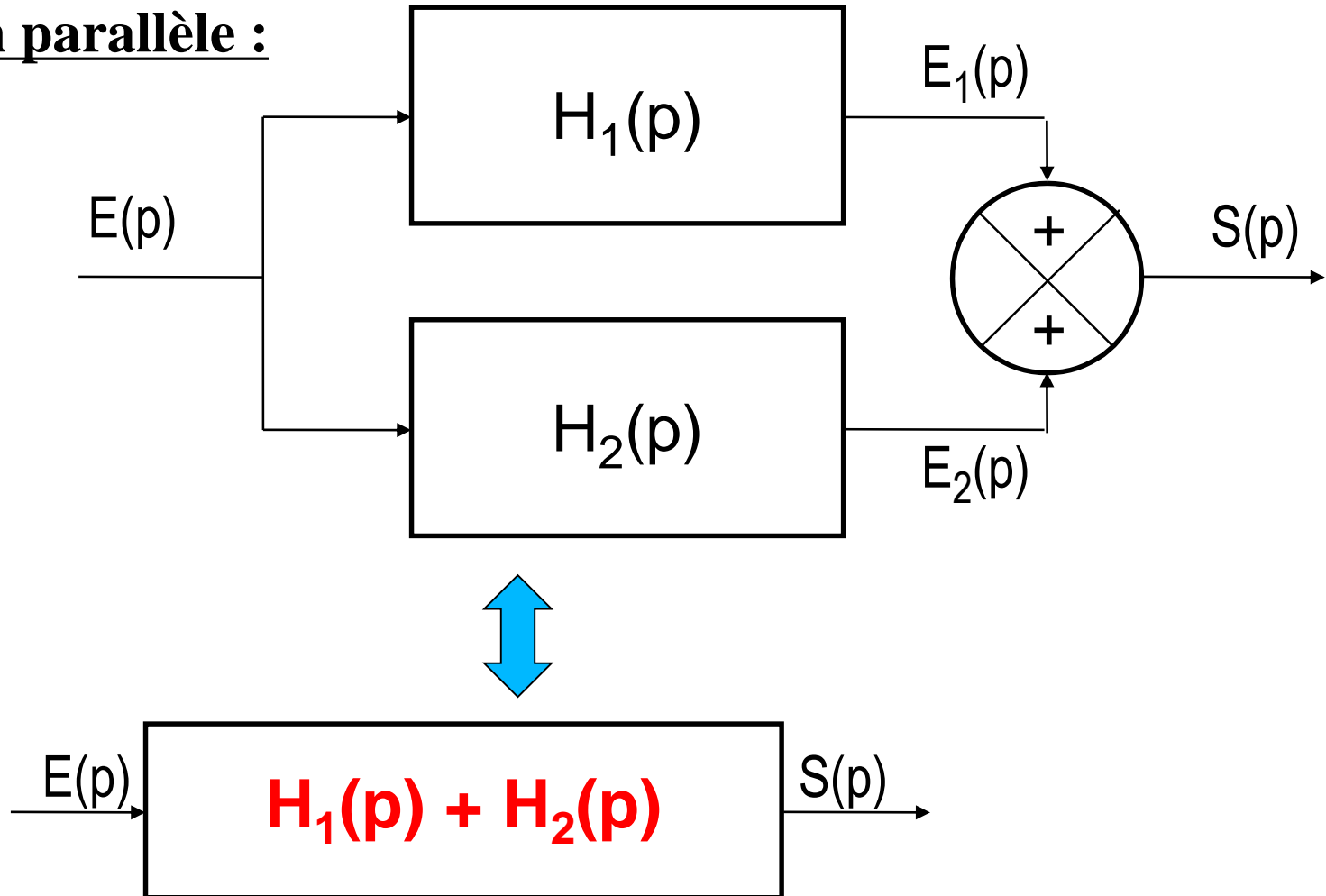


*Justification :*

$$S(p) = H_3(p) \cdot Y(p) = H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot X(p) = H_3(p) \cdot H_2(p) \cdot H_1(p) \cdot E(p)$$

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

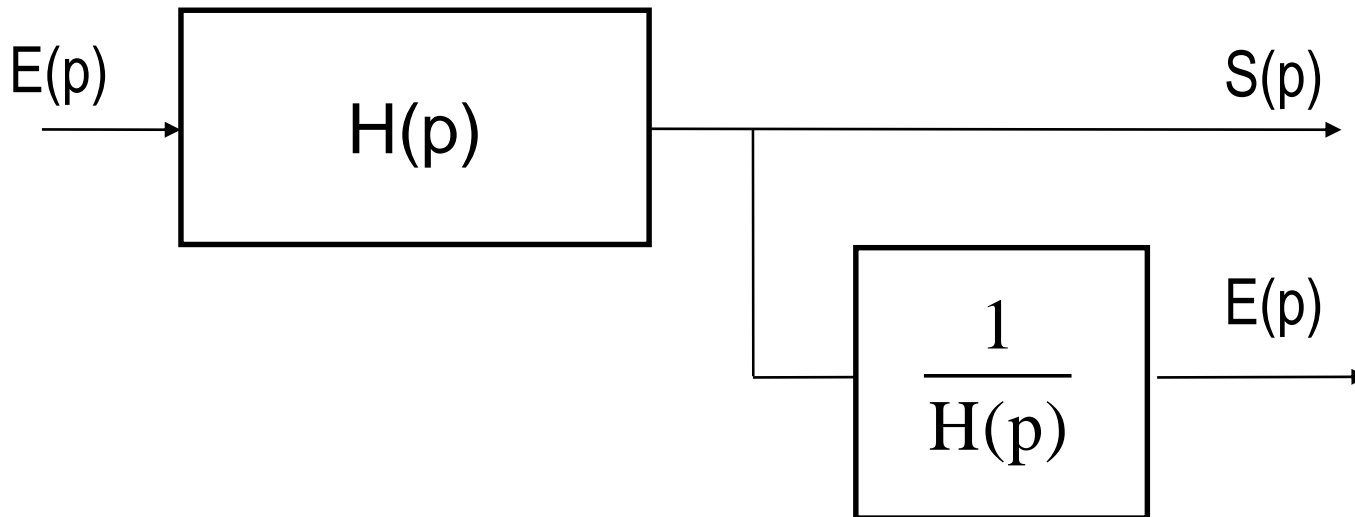
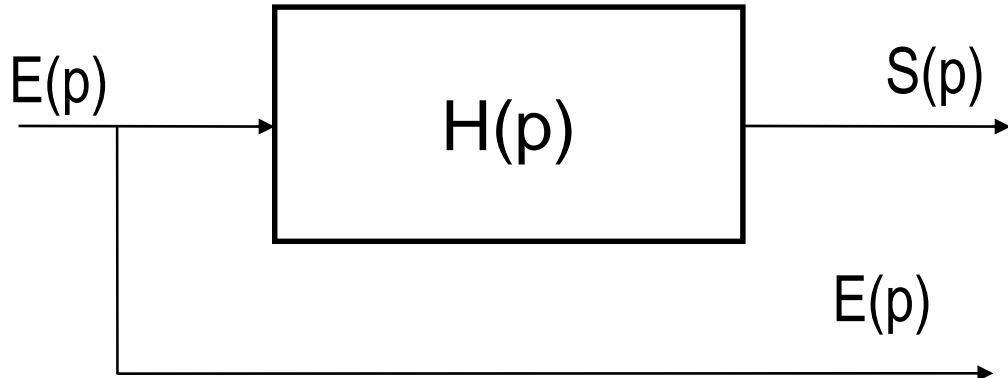
Blocs en parallèle :



*Justification :  $S(p) = E_1(p) + E_2(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).E(p) = [H_1(p) + H_2(p)].E(p)$*

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

Déplacement d'un point de prélèvement vers la droite :



*Justification :*

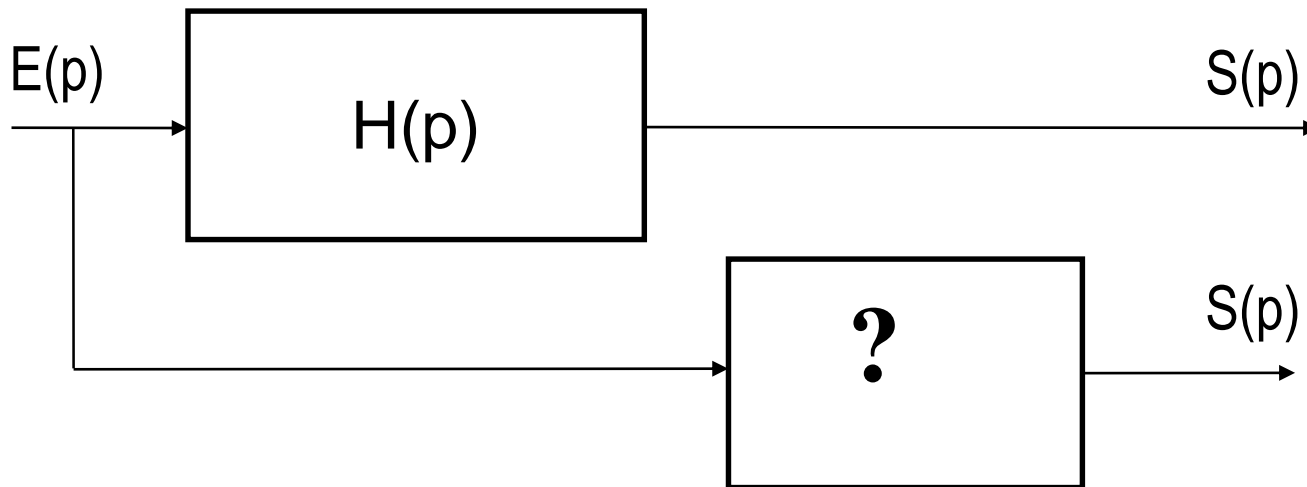
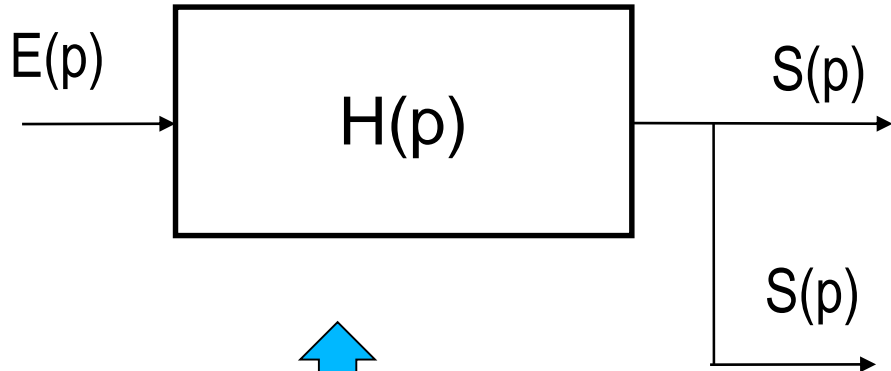
*Schéma 1 :  $S(p) = H(p).E(p)$   
et  $E(p) = E(p)$*

*Schéma 2 :  $S(p) = H(p).E(p)$   
et  $E(p) = H(p).?.E(p)$*

*$\Rightarrow ? = 1/H(p)$*

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## Déplacement d'un point de prélèvement vers la gauche :



*Justification :*

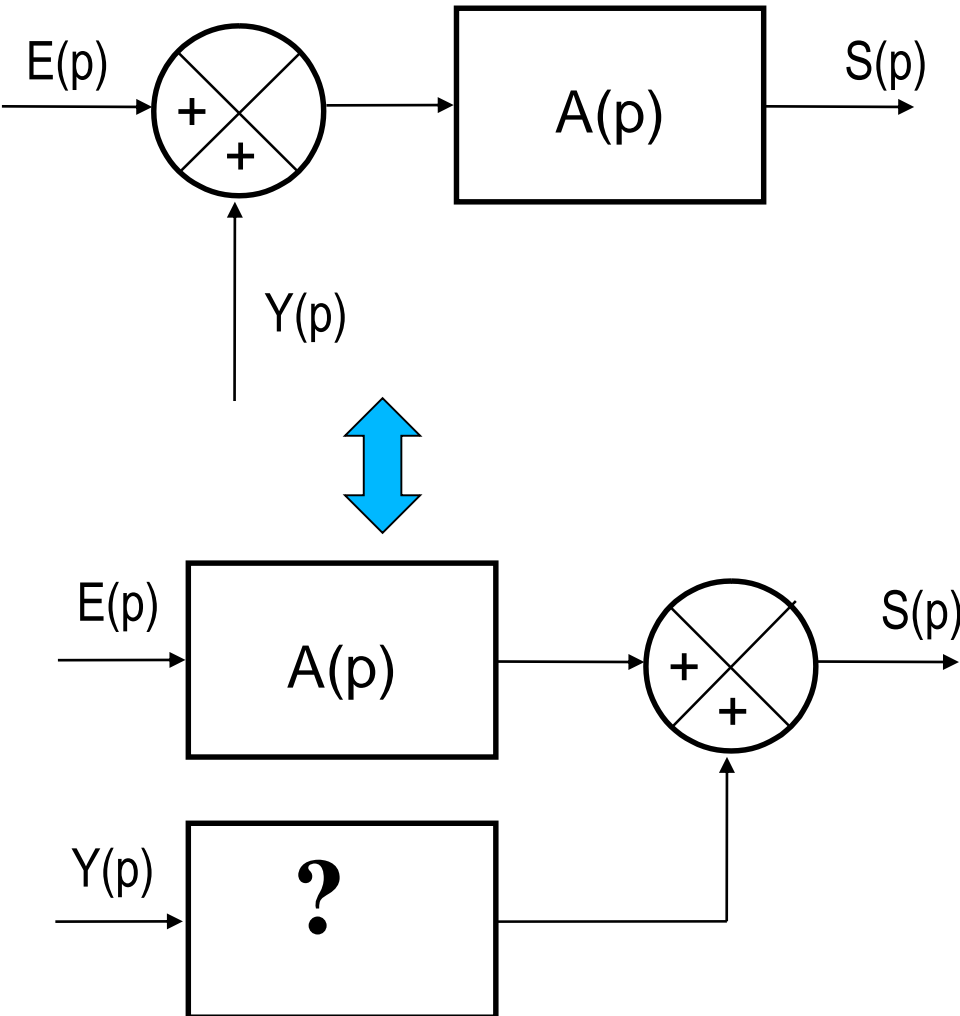
*Schéma 1 :  $S(p) = H(p).E(p)$*

*Schéma 2 :  $S(p) = H(p).E(p)$   
et  $S(p) = ?.E(p)$*

*$\Rightarrow ? = H(p)$*

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## Déplacement d'un comparateur vers la droite :



*Justification :*

*Schéma 1 :*

$$S(p) = A(p).E(p) + A(p).Y(p)$$

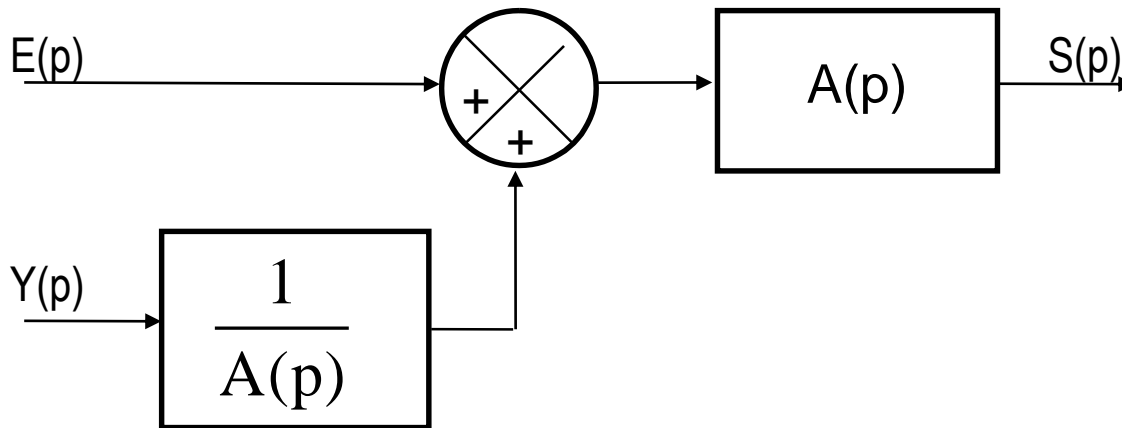
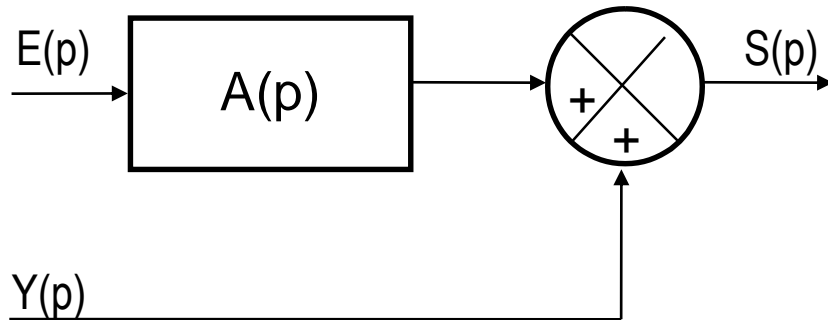
*Schéma 2 :*

$$S(p) = A(p).E(p) + ?.Y(p)$$

$$\Rightarrow ? = A(p)$$

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## Déplacement d'un comparateur vers la gauche :



*Justification :*

*Schéma 1 :*

$$S(p) = A(p).E(p) + Y(p)$$

*Schéma 2 :*

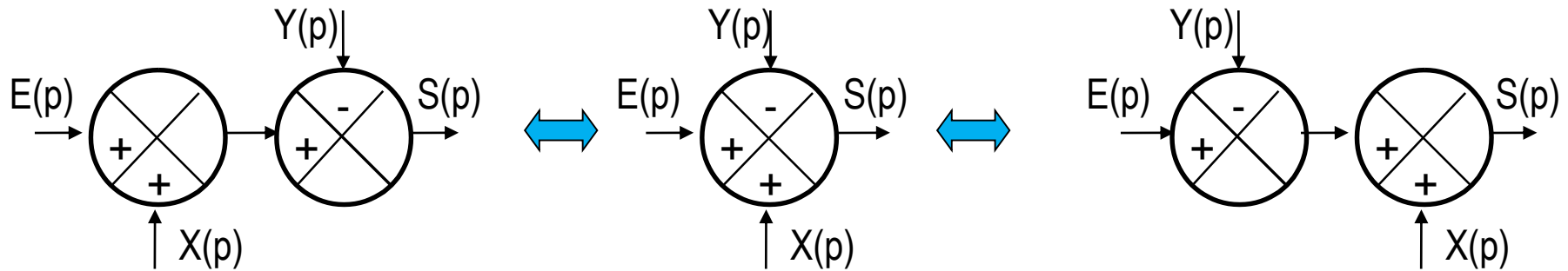
$$S(p) = A(p).E(p) + ?.A(p).Y(p)$$

$$\Rightarrow ? = 1/A(p)$$



# Manipulation des schéma-blocs et des FT

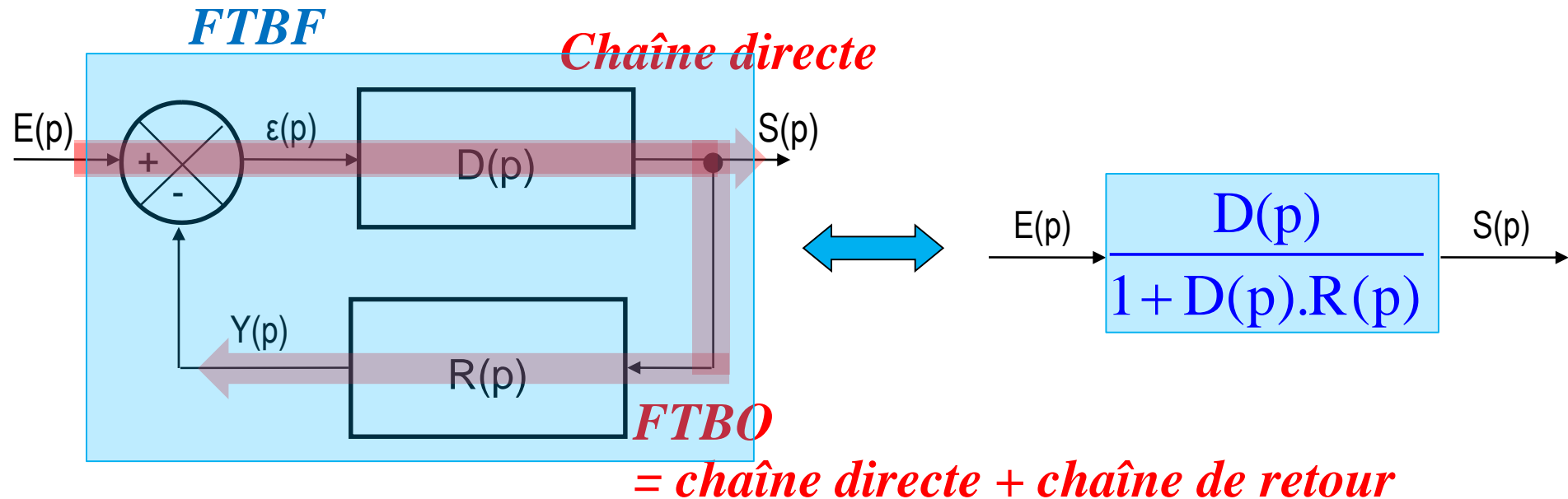
## Déplacement entre comparateurs :



$$\textit{Justification : } S(p) = E(p) + X(p) - Y(p)$$

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

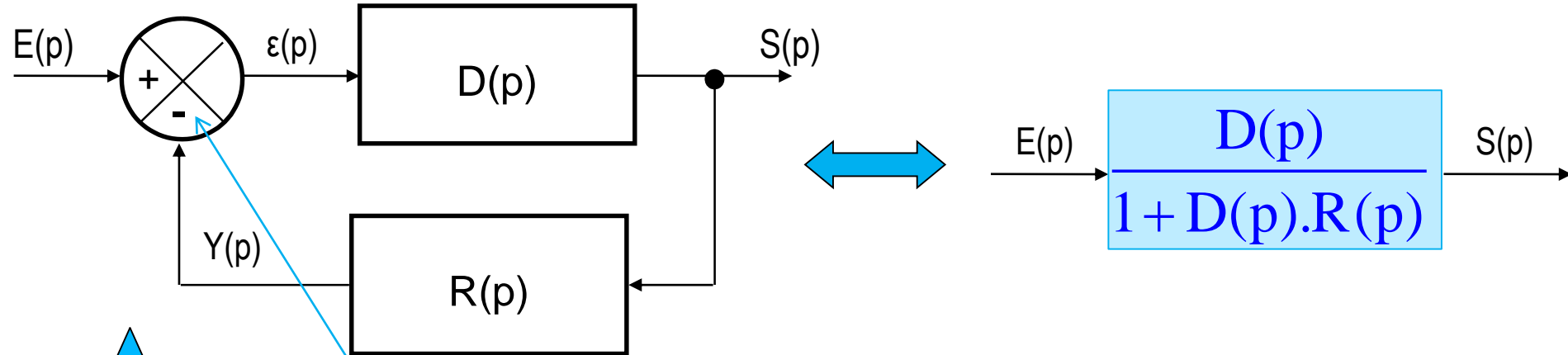
## FTBO et FTBF :



$$\text{FTBF} = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\text{chaîne directe}}{1 + \text{FTBO}}$$

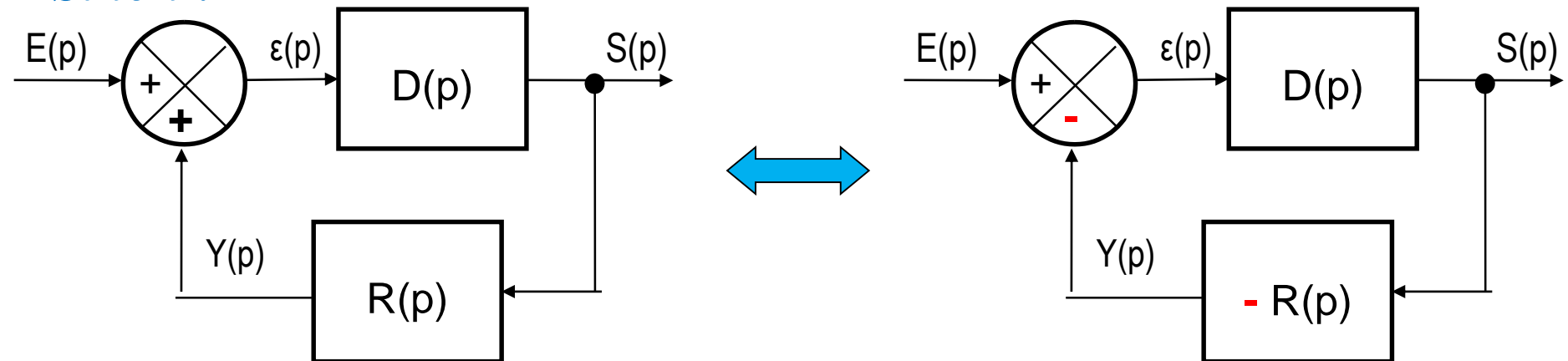
# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## FTBO et FTBF :



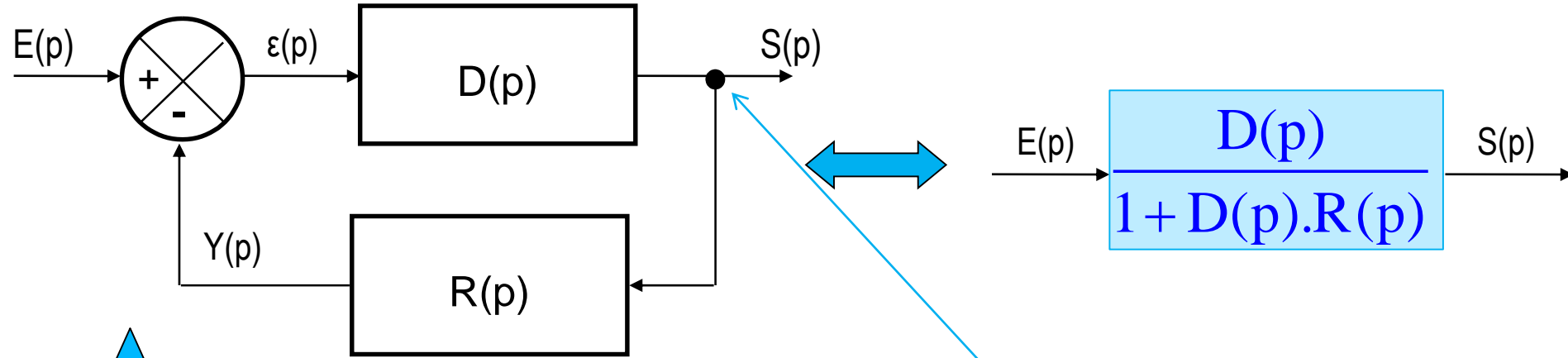
*Signe « - » pour le retour*

*Sinon :*

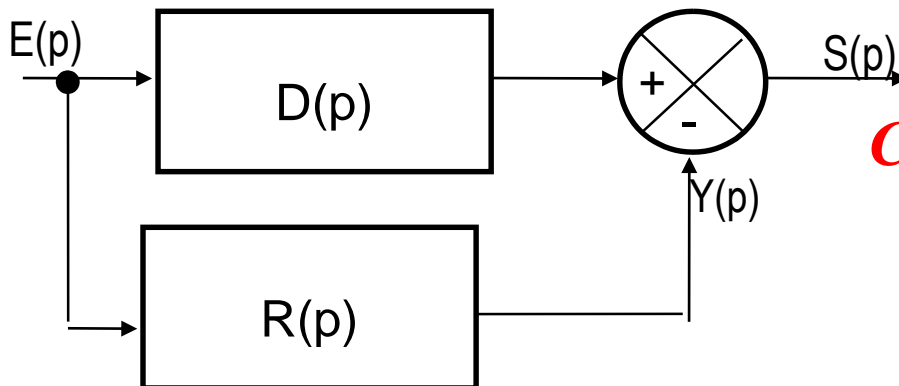


# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## FTBO et FTBF :



*Pour que le système soit bouclé, le point de prélèvement doit être situé après le comparateur (alors seulement le « retour » existe)*

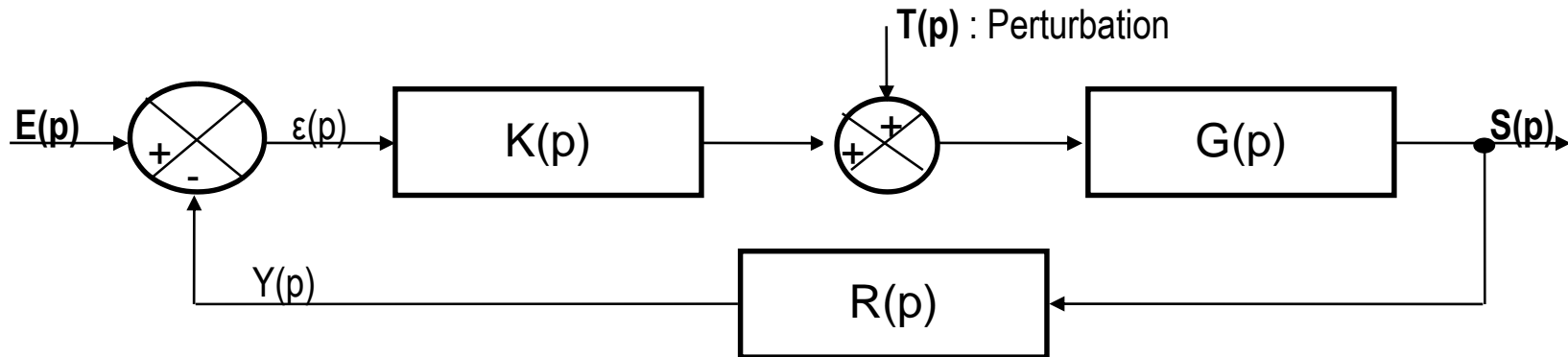


*Ceci n'est pas une boucle !!!*

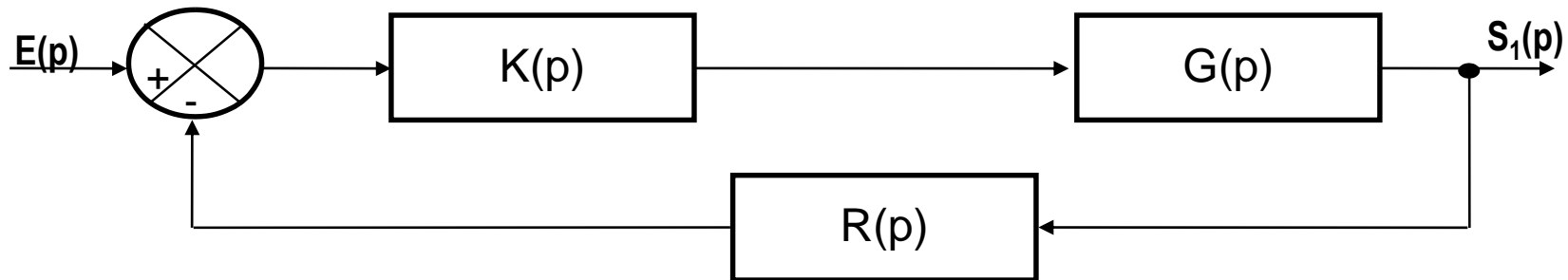
$$\frac{S(p)}{E(p)} = D(p) - R(p)$$

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## Systeme multi-entrées (théorème de superposition) :



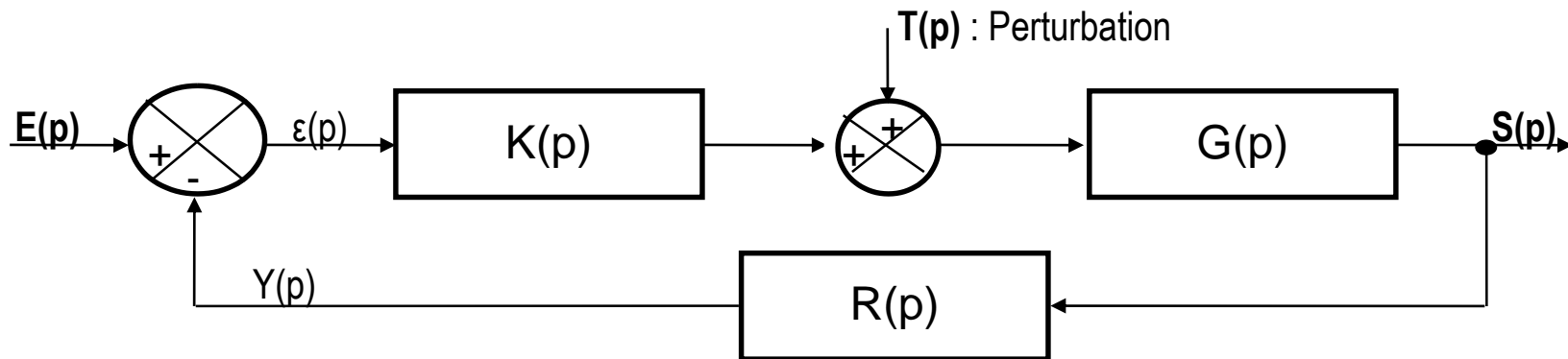
*Fonction de transfert entre  $E(p)$  et  $S(p)$  : prendre  $T(p)=0$  :*



$$H_1(p) = \frac{S_1(p)}{E(p)} = \frac{K(p).G(p)}{1 + K(p).G(p).R(p)}$$

# Manipulation des schéma-blocs et des FT

## Systeme multi-entrées (théorème de superposition) :



*Au final, la sortie pourra donc s'écrire :*

$$S(p) = H_1(p).E(p) + H_2(p).T(p)$$

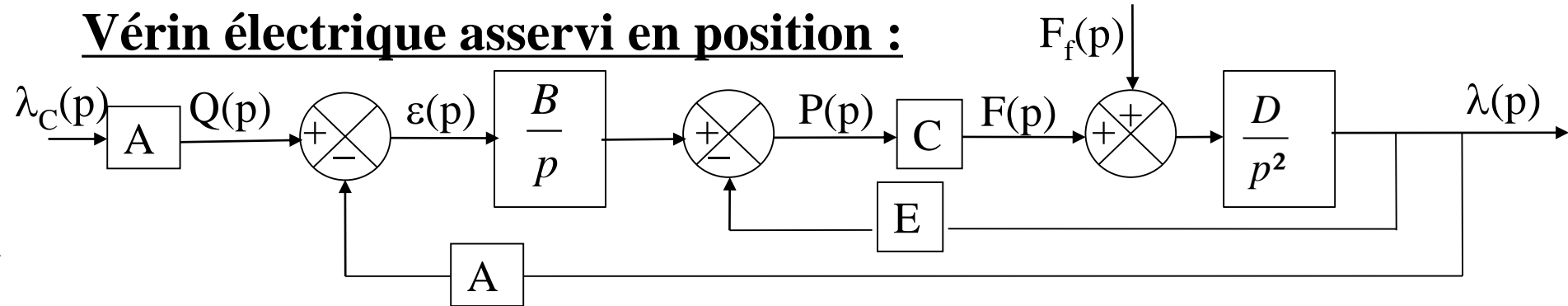
$$= \frac{K(p).G(p)}{1 + K(p).G(p).R(p)}.E(p) + \frac{G(p)}{1 + G(p).R(p).K(p)}.T(p)$$

*On étudiera donc séparément les effets des différentes entrées sur la sortie !*

*Concrètement nous n'étudierons qu'une seule entrée à la fois.*

# Exemple de FT à partir d'un schéma-blocs

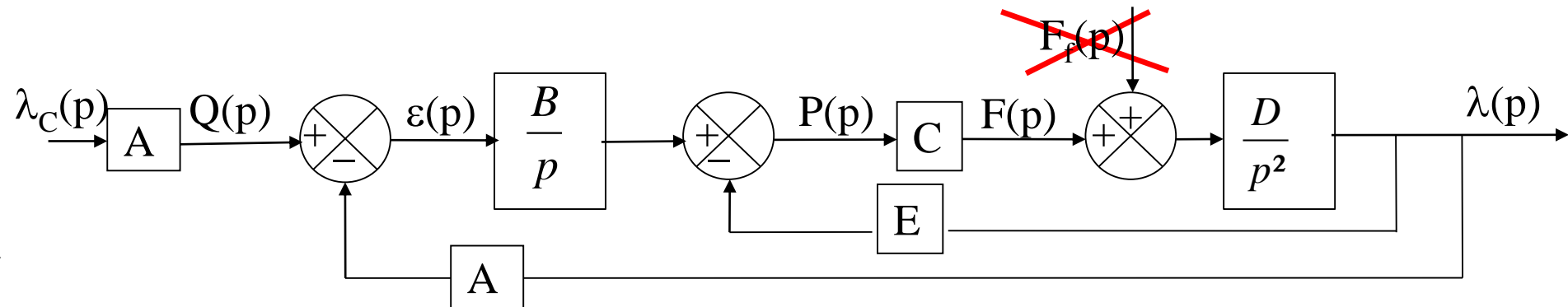
Vérin électrique asservi en position :



$$\lambda(p) = H_1(p) \cdot \lambda_c(p) + H_2(p) \cdot F_f(p)$$

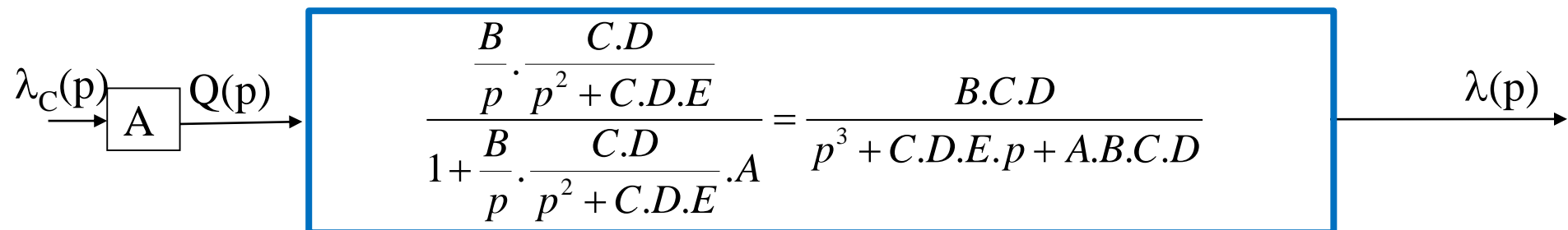
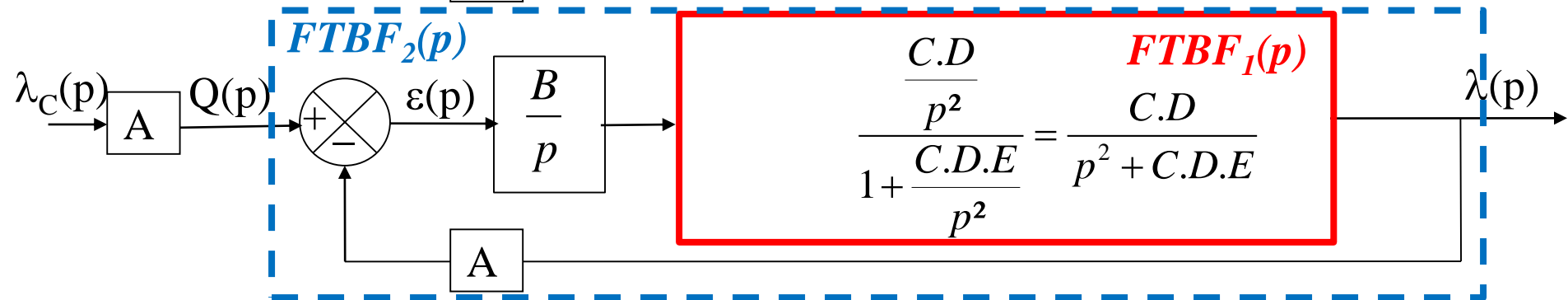
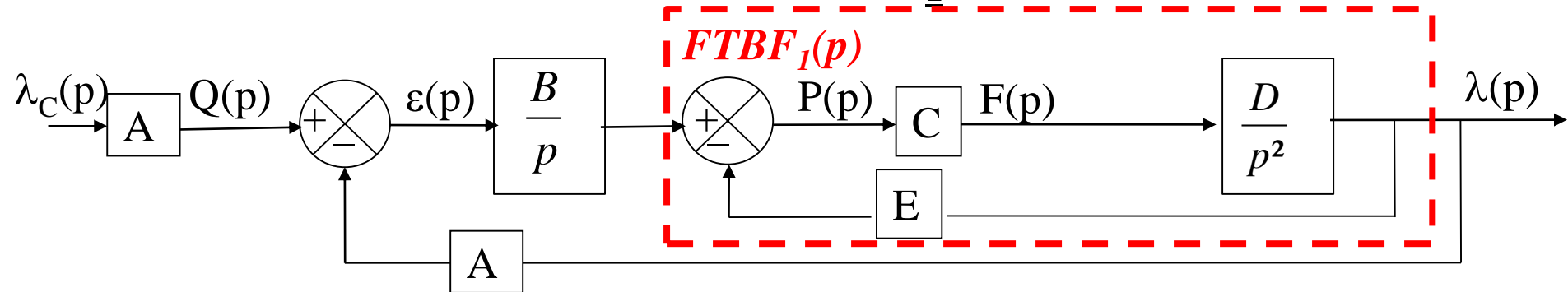
Pour déterminer  $H_1(p)$  : On considère que  $F_f(p)=0$

Deux méthodes possibles, soit la méthode directe, soit via le schéma-blocs (plus simple ici car il n'y a que des boucles simples)



# Exemple de FT à partir d'un schéma-blocs

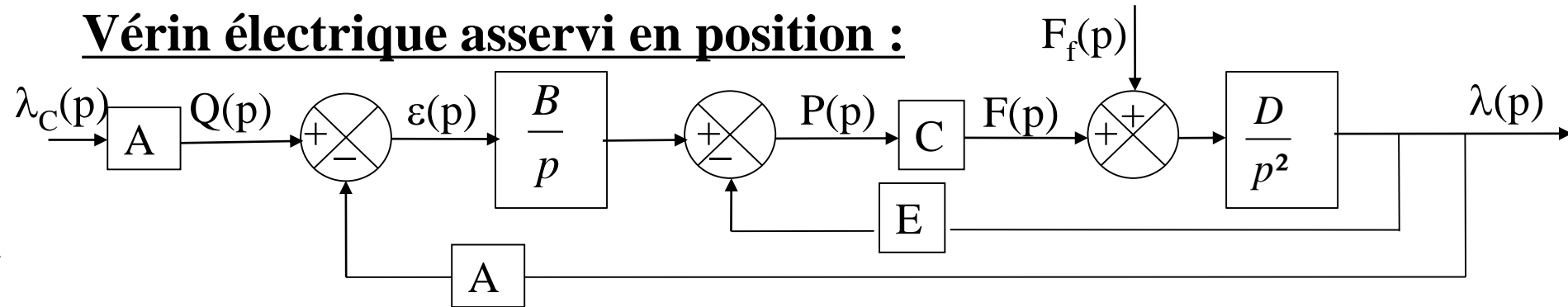
Vérin électrique asservi en position  $H_1(p)$  :





# Exemple de FT à partir d'un schéma-blocs

Vérin électrique asservi en position :



$$\lambda(p) = H_1(p) \cdot \lambda_c(p) + H_2(p) \cdot F_f(p)$$

Pour déterminer  $H_2(p)$  : On considère que  $\lambda_c(p) = 0$

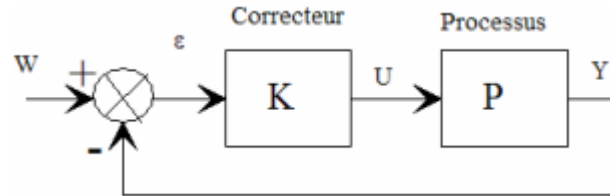
Deux méthodes possibles, soit la méthode directe, soit via le schéma-blocs (plus compliqué ici car les boucles sont complexes)

$$\lambda(p) = \frac{D}{p^2} \cdot \left[ F_f(p) + C \cdot \left( -E \cdot \lambda(p) + \frac{B}{p} \cdot (A \cdot 0 - A \cdot \lambda(p)) \right) \right]$$

$$\lambda(p) \left[ 1 + \frac{D \cdot C}{p^2} \cdot \left( E + \frac{A \cdot B}{p} \right) \right] = \frac{D}{p^2} \cdot F_f(p)$$

$$H_2(p) = \frac{\lambda(p)}{F_f(p)} = \frac{D \cdot p}{A \cdot B \cdot C \cdot D + C \cdot D \cdot E \cdot p + p^3}$$

# Commande classique d'asservissement

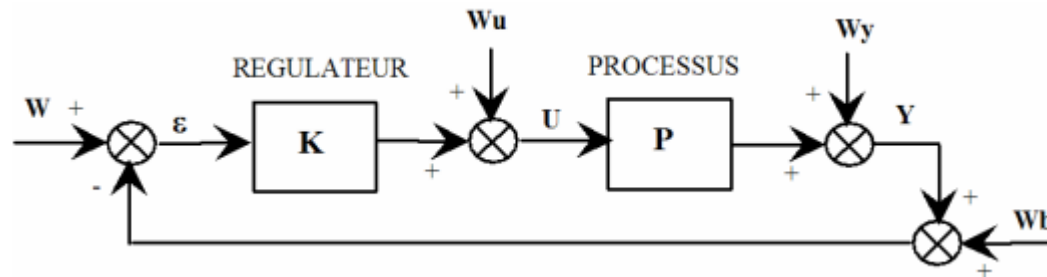


*On note  $L = K \cdot P$  le transfert de boucle*

*On note  $S$  la fonction de sensibilité*  $\frac{\epsilon}{W} = \frac{1}{1+L} = S$

*On note  $T$  la fonction de sensibilité complémentaire*  $\frac{Y}{W} = \frac{L}{1+L} = T$

# Commande classique d'asservissement + perturbations



Avec :

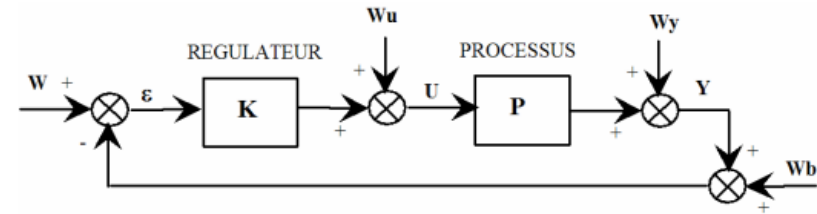
- $W_u$  bruit sur l'entrée  $u$
- $W_y$  bruit de sortie
- $W_b$  bruit de mesure

La sortie  $Y$  est alors donnée par la relation suivante

$$Y = \frac{K.P}{1+K.P} \cdot W + \frac{P}{1+K.P} \cdot W_u + \frac{1}{1+K.P} \cdot W_y - \frac{K.P}{1+K.P} \cdot W_b$$

# Ensemble des différentes fonctions de sensibilités

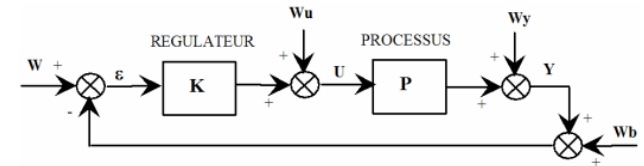
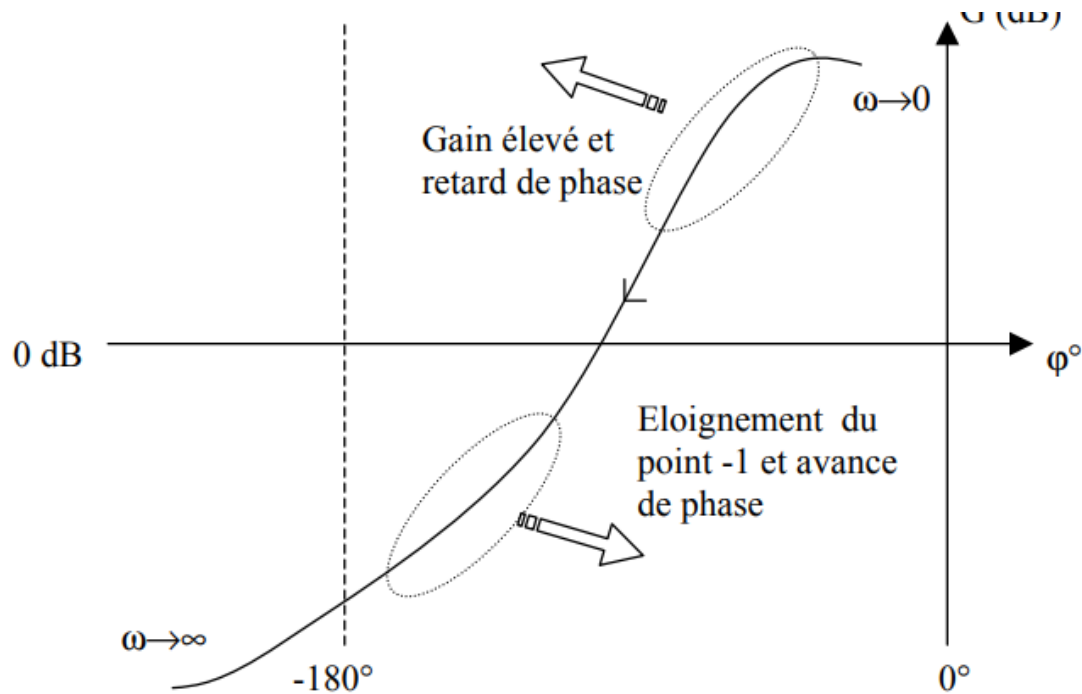
Le gain  $K(p) = \frac{R(p)}{S(p)}$  et le process  $P(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$  sont représentés par des fonctions de transferts



Sensibilité de la sortie à une perturbation sur la sortie	$S_{yy} = \frac{1}{1 + K.P}$	$S_{yy} = 1 - T$	$S_{yy} = \frac{A.S}{A.S + B.R}$
Sensibilité de la sortie à une perturbation sur la mesure	$S_{yb} = -\frac{K.P}{1 + K.P}$	$S_{yb} = -T$	$S_{yb} = -\frac{B.R}{A.S + B.R}$
Sensibilité de la sortie à une perturbation sur la commande	$S_{yu} = \frac{P}{1 + K.P}$	$S_{yu} = P.S_{yy}$	$S_{yu} = \frac{B.S}{A.S + B.R}$
Sensibilité de la commande à un bruit de sortie ou de mesure	$S_{uy} = -\frac{K}{1 + K.P}$	$S_{uy} = -K.S_{yy}$	$S_{uy} = -\frac{A.R}{A.S + B.R}$

# Allure recherchée lors de l'étude du correcteur K

- d'éloigner le lieu de Black du point -1 (0 dB, -180°) de façon à augmenter la stabilité, c'est à dire augmentation de la marge de gain et de la marge de phase. Souvent on choisit:  $M_G = 10$  dB et  $M_\phi \geq 45^\circ$



Retard de phase

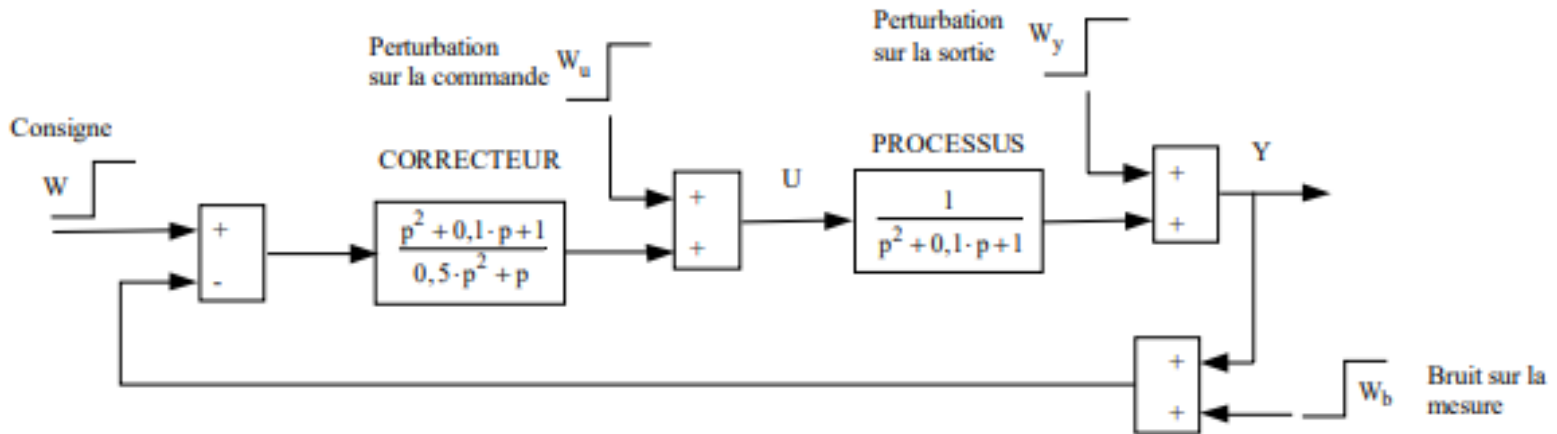
$$K(p) = \frac{1 + \tau_n \cdot p}{1 + b \cdot \tau_n \cdot p}, \quad b > 1$$

Avance de phase

$$K(p) = \frac{1 + a \cdot \tau_n \cdot p}{1 + \tau_n \cdot p}, \quad a > 1$$

- d'augmenter le gain du système en boucle ouverte pour augmenter la précision. L'annulation de l'erreur statique peut être obtenue si le système en boucle ouverte admet une intégration ( $1/p$ ).
- D'augmenter la bande passante, ce qui diminue le temps de réponse,
- Provoquer une avance de phase en moyenne et haute fréquences et un retard de phase en basse fréquence pour une meilleure stabilité.

# Exemple



Montrer que

$$\frac{Y(p)}{W(p)} = \frac{1}{0,5.p^2 + p + 1}$$

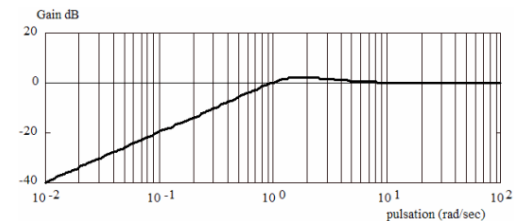
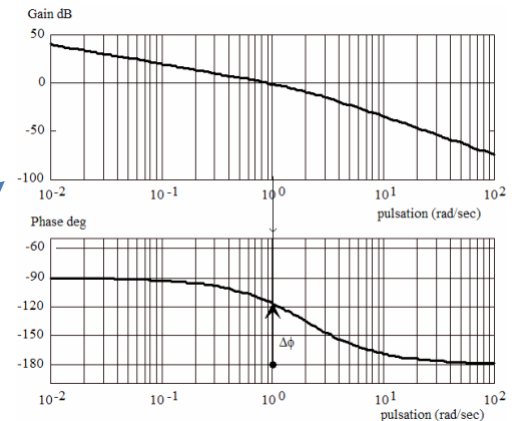
Transfert de boucle

$$K(p).P(p) = \frac{B(p).R(p)}{A(p).S(p)} = \frac{1}{0,5.p^2 + p}$$

Sensibilité

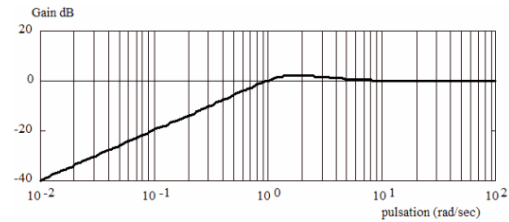
$$\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{A(p).S(p)}{A(p).S(p) + B(p).R(p)}$$

$$\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{0,5.p^2 + p}{0,5.p^2 + p + 1}$$



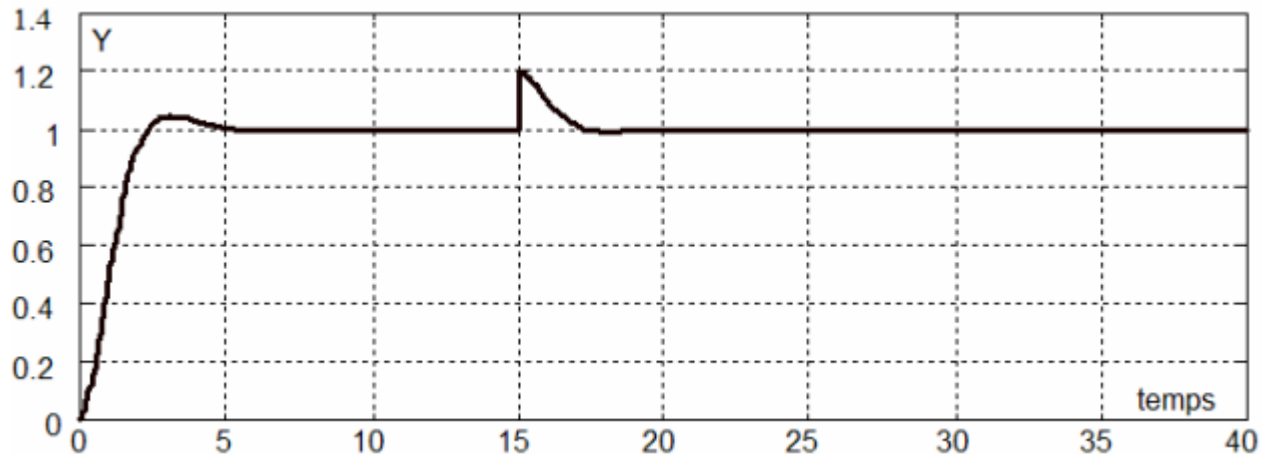
# Exemple

Sensibilité  $\frac{\varepsilon_y}{W_y} = \frac{0,5.p^2 + p}{0,5.p^2 + p + 1}$



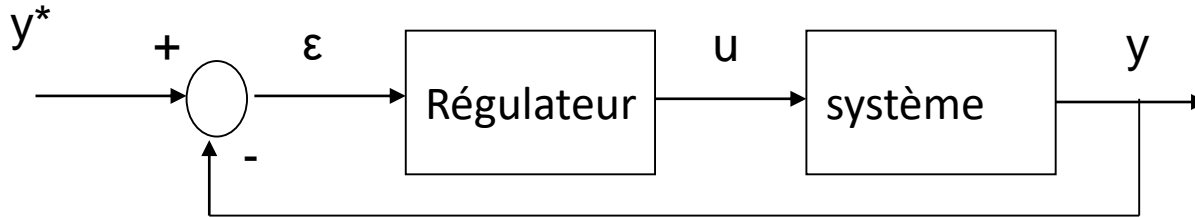
Réponse fréquentielle

Réponse temporelle à une perturbation échelon en sortie à t=15s



Réponse indicielle avec une perturbation sur la sortie

## Etude des correcteurs : Régulateur de type proportionnel intégrale dérivée



$$u(t) = K_p * (y(t) - y(t)^*) + K_i \int (y(t) - y(t)^*) dt + K_d \frac{d}{dt} (y(t) - y(t)^*)$$
$$= K_p * \varepsilon(t) + K_i \int \varepsilon(t) dt + \frac{d}{dt} \varepsilon(t)$$

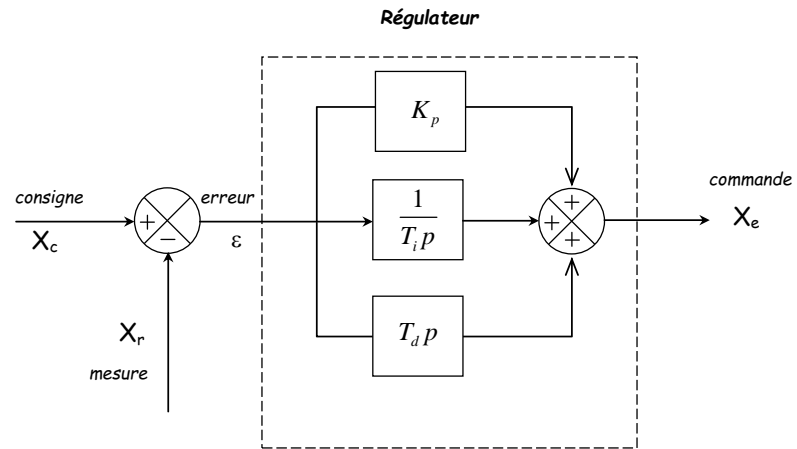
Pour augmenter la dynamique et compenser les inerties dues au temps mort on ajoute une action dérivée au régulateur.



# Structure : Régulateur de type proportionnel intégrale dérivée

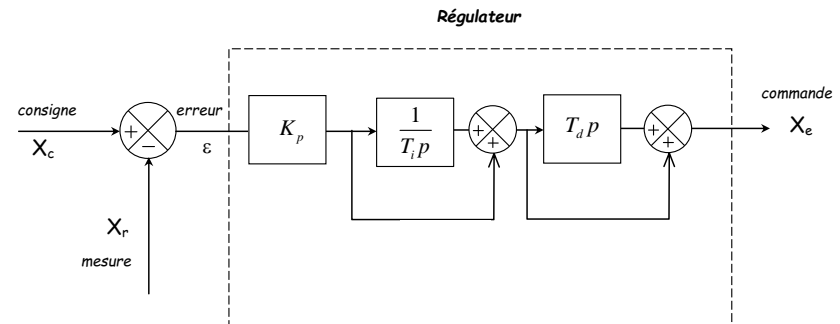
## Parallèle

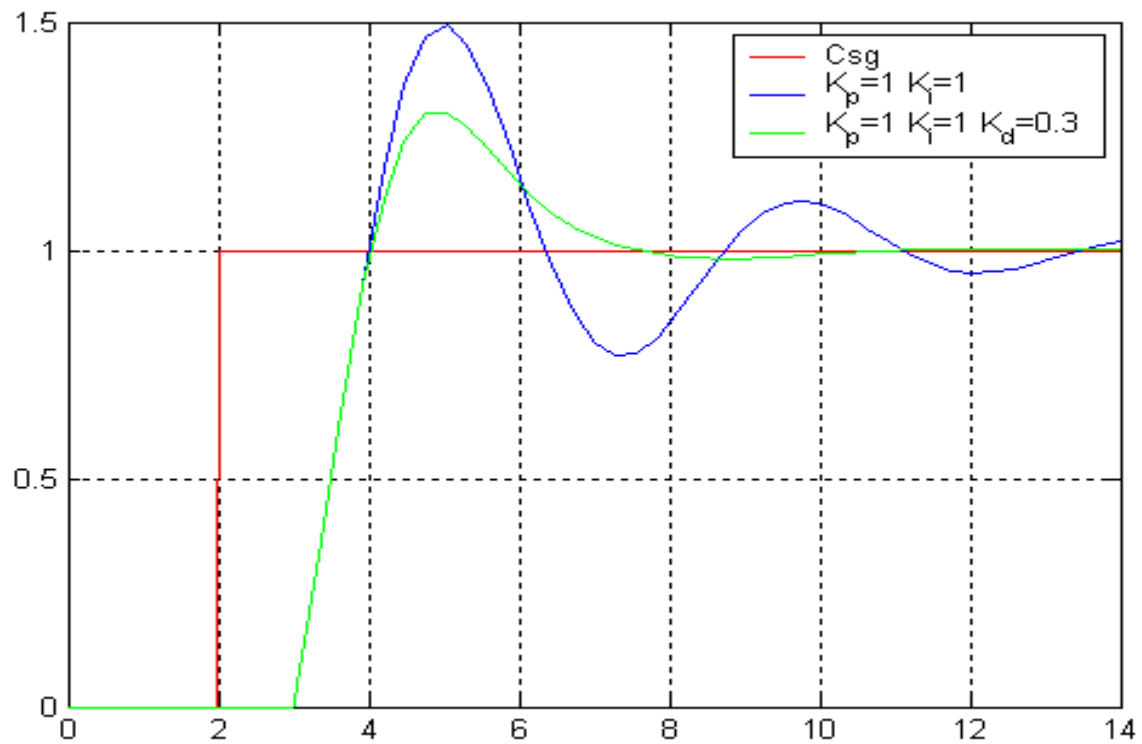
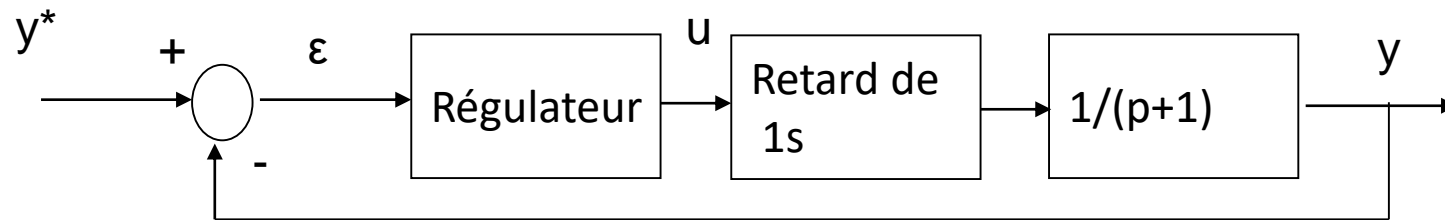
$$C(p) = \frac{X_e(p)}{\varepsilon(p)} = K_p + T_d p + \frac{1}{T_i p}$$



## Série

$$C(p) = \frac{X_e(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) (1 + T_d p)$$





## Résumé : du régulateur PID

Action	Avantage	Désavantage
P	Dynamique	Ne permet pas d'annuler une erreur statique
I	Annulation d'erreur statique	Action lente
D	Action très dynamique	Sensibilité aux bruits

Avantage des régulateur PID :

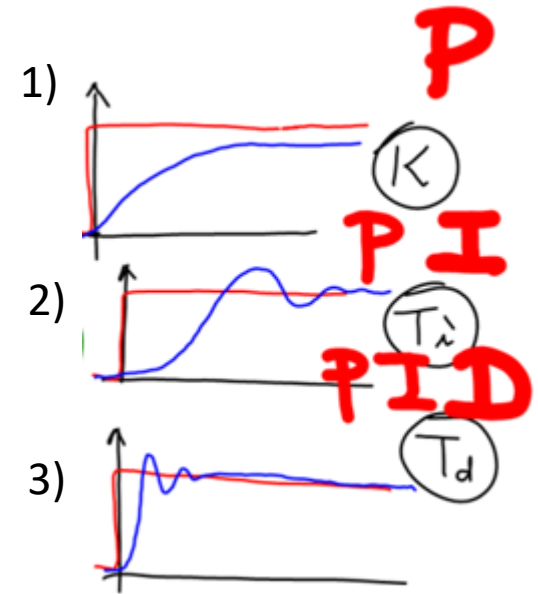
- Structure simple
- Pas besoin de modélisation pour la synthèse du régulateur

Désavantage des régulateur PID

- Réglage empirique
- Pas de garantie sur les performances et la stabilité

## Résumé : du régaleur PID

- 1) Le correcteur proportionnel amplifie le signal d'erreur mais il persiste une erreur.
- 2) On ajoute un correcteur intégral pour annuler l'erreur statique.
- 3) Si le système ne réagit pas assez vite, il convient d'ajouter le correcteur dérivé.



# Compensation de pôles et/ou zéros instables

- Hypothèse : Pour assurer une stabilité interne en présence de pôles et/ou zéros instables on suppose qu'il n'y a pas de compensation de pôles et zéros entre  $K(s)$  et  $G(s)$  (robustesse aux incertitudes de modèle).

- Exemple:  $P(s) = \frac{1}{s-1}$ ,  $K_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$ ,  $K_2(s) = 2$

- Le correcteur  $K_1(s)$  compense le pôle instable  $p=1$ , on obtient dès lors pour  $K_1(s)$  et  $K_2(s)$  respectivement les fonctions de sensibilité complémentaire

$$T_1(s) = \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}, \quad T_2(s) = \frac{\frac{2}{s-1}}{1 + \frac{2}{s-1}} = \frac{2}{s+1}, \quad P^\delta(s) = \frac{1}{s-1+\delta},$$

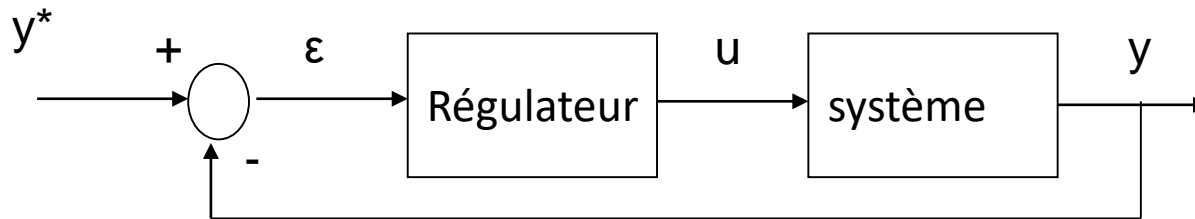
- Si l'on considère maintenant une petite variation  $\delta$  du pôle du procédé alors :

$$T_1(s) = \frac{\frac{1}{s-1+\delta} \frac{s-1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s-1+\delta} \frac{s-1}{s+1}} = \frac{s-1}{(s-1+\delta)(s+1)+s-1} = \frac{s-1}{s^2 + (\delta+1)s + \delta - 2}, \quad T_2(s) = \frac{\frac{2}{s-1+\delta}}{1 + \frac{2}{s-1+\delta}} = \frac{2}{s+1+\delta}$$

- ✓  $T_1(s)$  est alors instable pour une perturbation  $\delta$  très faible, alors que  $T_2(s)$  reste stable pour  $\delta > -1$

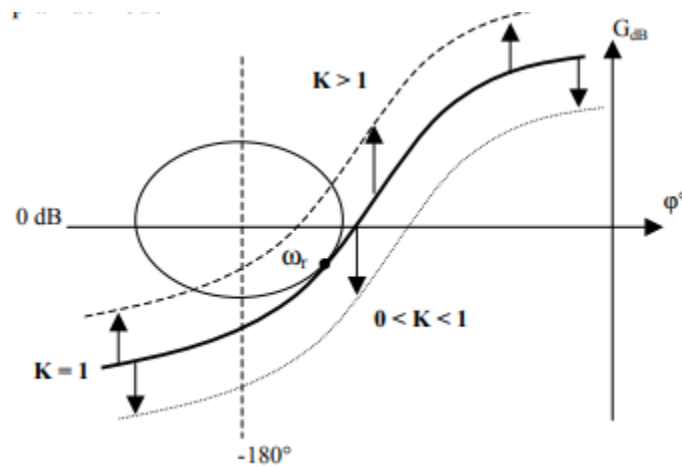
# Correcteur proportionnel

- Hypothèse : Régulateur égal à un gain proportionnel constant noté  $K$



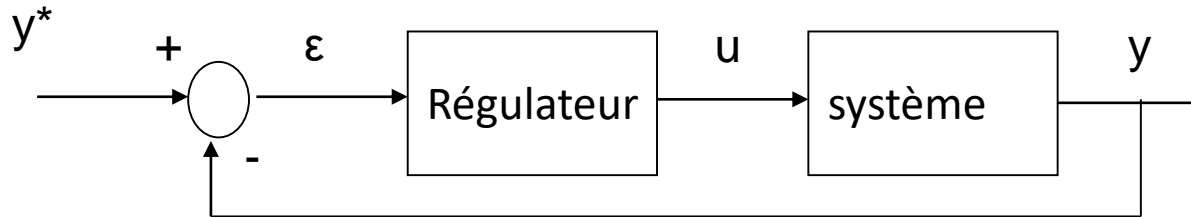
- Action du correcteur

- Ce correcteur équivaut à une translation verticale de la courbe dans plan de black et bode



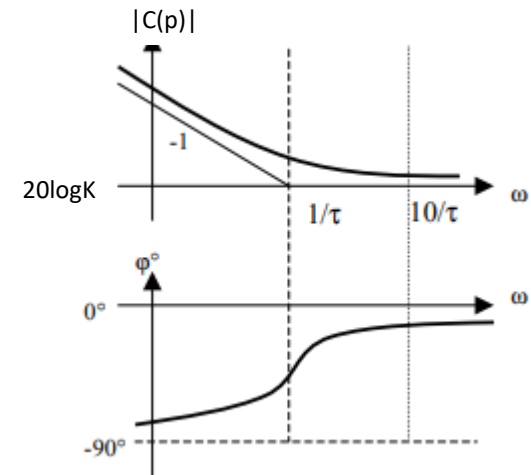
# Correcteur proportionnel Intégral

- Hypothèse : Régulateur est noté  $C(p)$  et peut être représenté par  $C(p) = K \cdot \frac{1 + \tau \cdot p}{\tau \cdot p}$ ,  $K > 0$ ,  $\tau > 0$



## □ Action du correcteur

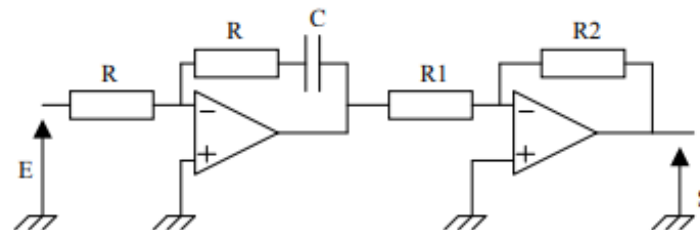
- Ce correcteur introduit un pôle à l'origine. L'action de ce correcteur se fait sur les basses fréquences. La présence d'un intégrateur annule l'erreur statique, mais il ralentit le système et peut le déstabiliser s'il est mal placé.
- On remarque, sur le diagramme de Bode, que ce correcteur n'influence pratiquement plus la phase pour des pulsations telles que  $\omega > 10/\tau$
- Pour information : Réalisation électrique du régulateur PI



$$C(p) = \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1 + RC \cdot p}{RC \cdot p}$$

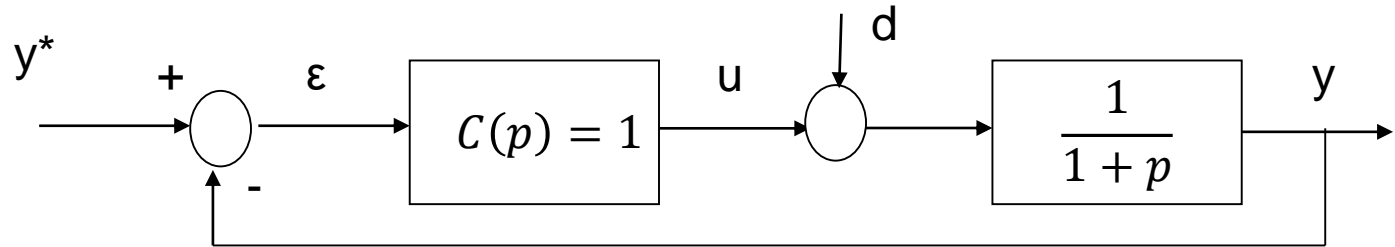
$$\tau = R \cdot C$$

$$K = R_2 / R_1$$



# Application : Influence correcteurs P et PI

- ❑ Hypothèse : Régulateur  $C(p)$  égal à un régulateur P



- ❑ Donner le bode du transfert de boucle
- ❑ Donner la fonction de sensibilité et analyser la réponse de l'erreur à  $t \rightarrow \infty$  pour une perturbation  $d(t)$  constante

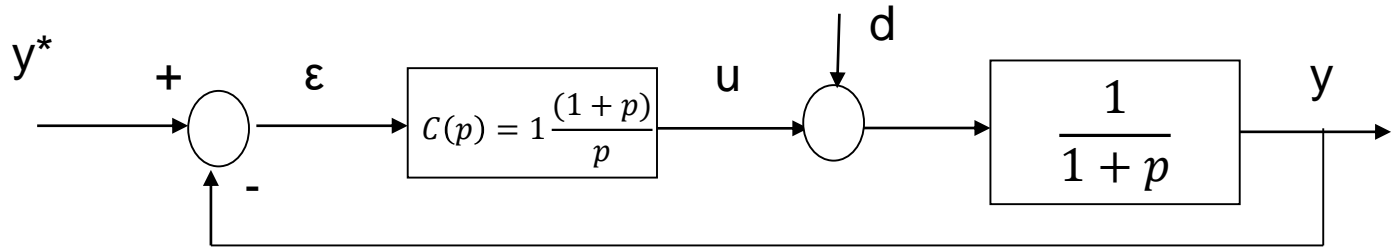
$$\frac{\varepsilon(p)}{d(p)} = ?$$

- ❑ Aide utiliser le théorème des valeurs aux limites



# Application : Influence correcteurs P et PI

- ❑ Hypothèse : Régulateur  $C(p)$  égal à un régulateur PI



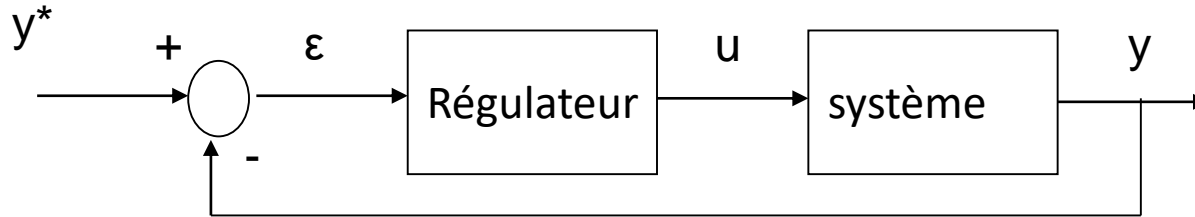
- ❑ Donner le bode du transfert de boucle
- ❑ Donner la fonction de sensibilité et analyser la réponse de l'erreur à  $t \rightarrow \infty$  pour une perturbation  $d(t)$  constante

$$\frac{\varepsilon(p)}{d(p)} = ?$$

- ❑ Aide utiliser le théorème des valeurs aux limites

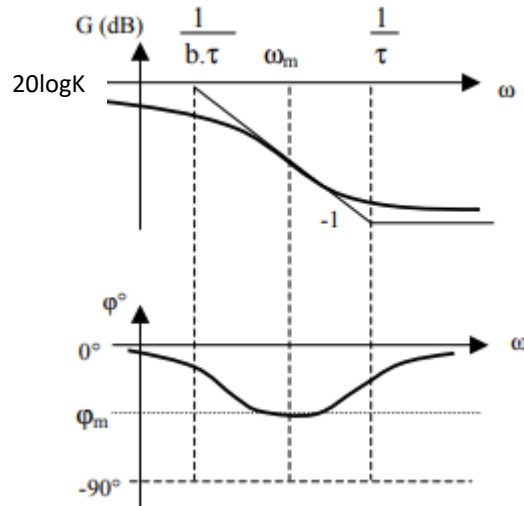
# Correcteur à retard de phase

- Hypothèse : Régulateur égal à  $C(p) = K \cdot \frac{1 + \tau \cdot p}{1 + b \cdot \tau \cdot p}$ ,  $b > 1$ ,  $K > 1$ ,  $\tau > 0$

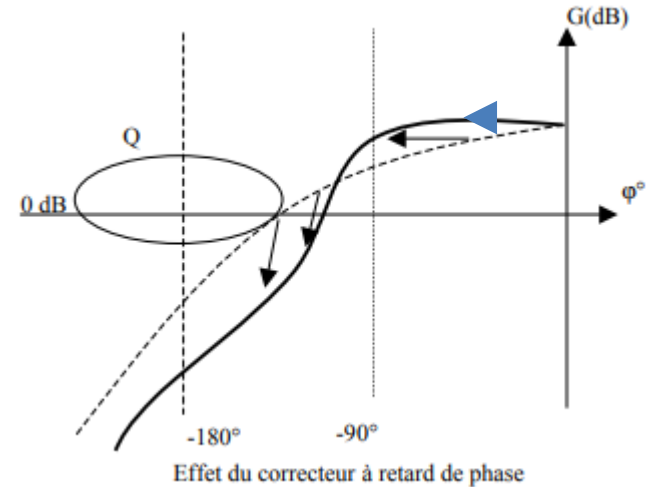


## □ Action du correcteur

- L'action se fait sur les basses fréquences. Il permet de réduire l'erreur statique et augmente la robustesse dans la zone fréquentielle souhaitée



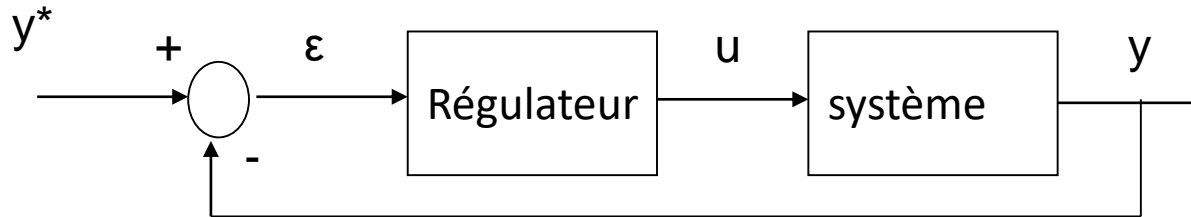
Bode et Phase du correcteur



Loop avec et sans le correcteur

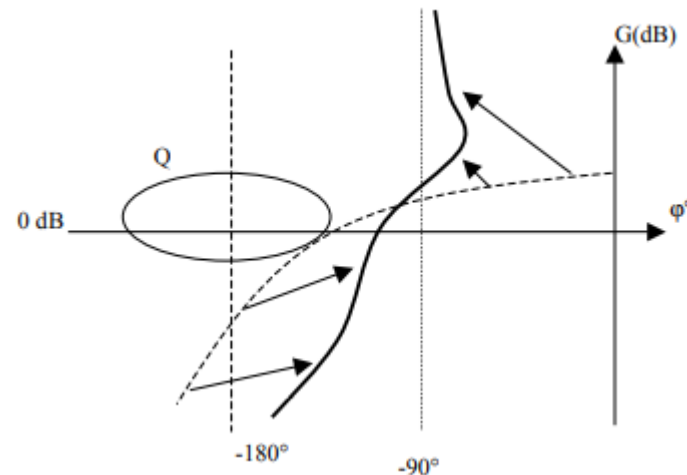
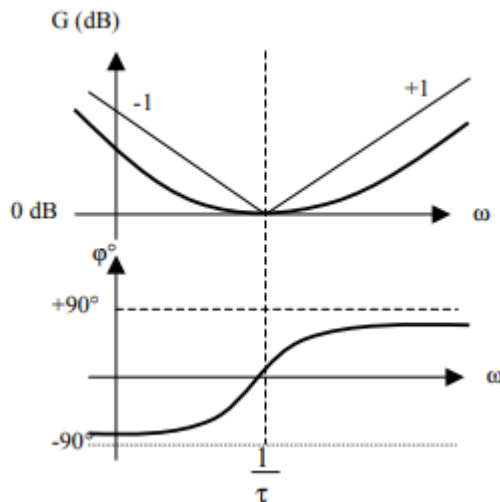
# Correcteur PID

- Hypothèse : Régulateur égal à  $C(p) = A + \tau_d \cdot p + \frac{\tau_i}{p} = \frac{K}{\tau \cdot p} (1 + \tau_1 \cdot p)(1 + \tau_2 \cdot p)$



## □ Action du correcteur

- L'action se fait sur toutes les fréquences. Son effet est stabilisant, il annule l'erreur statique et contribue à augmenter la rapidité.

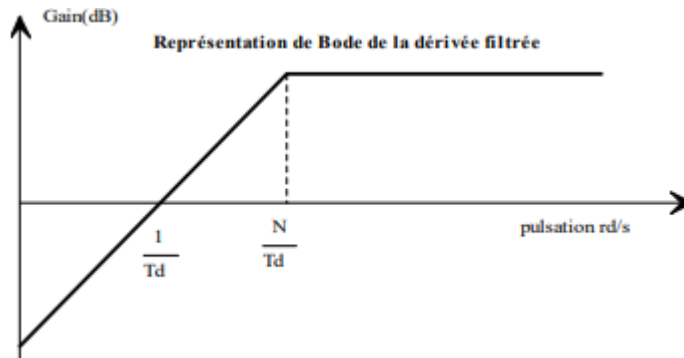


# Correcteur PID filtré

- L'action dérivée d'un correcteur PID peut poser des problèmes d'amplification du bruit dans les hautes fréquences, c'est pour cela que l'on adjoint souvent à l'action dérivée un filtre passe bas du premier ordre. Le transfert d'un PID filtré est alors:

$$\frac{U(p)}{\varepsilon(p)} = K_p \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_i \cdot p} + \frac{T_d \cdot p}{1 + \frac{T_d \cdot p}{N}} \right) = \frac{\frac{K_p}{T_i} + K_p \cdot \left( 1 + \frac{T_d}{N \cdot T_i} \right) \cdot p + K_p \cdot T_d \cdot \left( 1 + \frac{1}{N} \right) \cdot p^2}{p + \frac{T_d}{N} \cdot p^2}$$

La représentation fréquentielle de l'action dérivée est donnée par la figure



Ce régulateur dispose de quatre paramètres de réglages qui pourront être mis à profit pour maîtriser la dynamique d'un processus du second ordre.