EXAMEN FINAL AC321 - 06/01/2010

Commande des systèmes linéaires – représentation externe à temps continus[1]

feuille A4 R/V autorisée. Toutes calculatrices autorisées. Durée : 1H30.

1 EXERCICE I

On considère trois populations habitant un éco - système : les chasseurs, les lapins et les renards. Des études sur les dix dernières années, alors que la chasse au renard était interdite, ont permis d'écrire les équations suivantes, où l'on note respectivement x(t), y(t) et z(t) les niveaux de ces populations à l'instant t (les temps sont exprimés en années - saisons de chasse) :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay - bx\\ \dot{y} &= 10 + \alpha y - \beta x - 20\gamma z\\ \dot{z} &= \delta(y - 20z)\end{aligned} \qquad (1)$$

où tous les paramètres sont > 0.

A la suite d'études statistiques on sait avec une bonne précision que : $a = 1/10$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$ et $\gamma = 1$.

On revanche, le paramètre concernant les renards, δ est inconnu, excepté que l'on sait que $\delta \in\ ]0, 2]$. On sait par ailleurs qu'il y a actuellement que 2 chasseurs, 10 lapins et 4 maigres renard.

1) Point d'équilibre

a) Après avoir brièvement interprété les équations ("plus il y a de lapins, plus il y a de chasseurs", etc), déterminer le point d'équilibre de ce système, pour $a = 1/10$, $b = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$ et $\delta \in\ ]0, 2]$.

b) Cet équilibre dépend-il de δ?

c) Sa stabilité en dépend-elle?

d) Que conclure dans les cas $\delta = 1/20$ et $\delta = 2$?

2 EXERCICE II

On considère le système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu\\ y &= Cx\end{aligned}$$

où $A = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1\\ 0\end{bmatrix}$ et $C = [1\ 0]$

2.1.1 Déterminer le(s) modes (appliquer le critère de Popov) et le(s) état(s) non commandable(s)

2.1.2 Appliquer une commande par retour d'état u=-Kx et déterminer K tel que les modes de la boucle fermée soient en – 4 et –2.

2.1.3 Est –il possible de fixer l'ensemble des modes de la boucle fermée en –2.

2.1.4 Donner le schéma bloc de commande associé et déterminer la fonction de sensibilité S avec K déterminé en 2.1.2 et en déduire son maximum. Tracé le module de S.

2.1.5 Quel est l'intérêt de calculer le maximun de S.

3 PROBLEME

On considère le système présenté en figure 1, lequel est formé d 'une masse M suspendue à un fil rigide de longueur l fixé en 0 et soumise à l 'action du champ de gravité g. La commande est représenté par le couple τ, il s'agit de l'unique force extérieure appliquée directement sur le système.

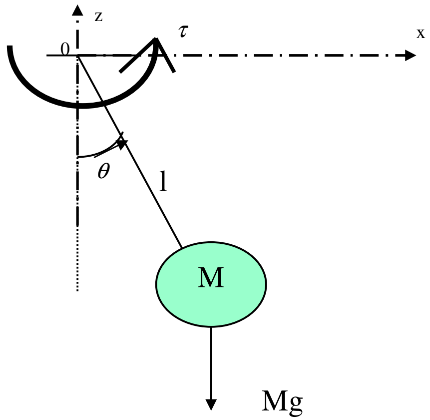

Figure 1 : Pendule simple, (0 est l'origine du repère absolu représenté par x et z)

A) *Montrer par les équations d'Euler Lagrange que le modèle mathématique du système représenté en figure 1 est donné par la relation non linaire suivante*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\theta = u$$

où $u = \tau / Ml^2$ *est le couple normalisé à l 'entrée.*

On précisera :

L'énergie cinétique T

L'énergie potentiel V

Le Lagrangien L=T-V en fonction de θ et $\dot{\theta}$

ESISAR 5ème Année d'études
AC- AC321: Commande des systèmes linéaires (rep interne)
Département **: AUTOMATIQUE**
web : http://koenig-damien.jimdo.com
e-mail : damien.koenig@esisar.grenoble-inp.fr

Déterminer respectivement

$\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right) = ?$ $\quad\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\right) = ?$ $\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right) = ?$ $\quad$ pour i=1, $q_1=\theta$ et $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$

Rappel : Les équations d'Euler – Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = u_i$$

où L est le Lagrangien formé par :

$$L(q,\dot{q}) = T(q_1,\cdots q_n,\dot{q}_1,\cdots \dot{q}_n) - V(q_1,\cdots q_n)$$

et u_i sont les forces généralisées (forces, moments) appliquées aux degrés de liberté correspondants. $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ est l'énergie cinétique, M(q) matrice symétrique composée des termes inertiels (J, m) et V est l'énergie potentielle.

B) Déterminer l'équilibre physique du système, on précisera θ_e et u_e.

C) Donner le modèle linéarisé tangent au point d'équilibre considéré.

D) Montrer que l'une des représentations d'état du modèle linéaire peut être donnée par le système matriciel suivant

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

où $x = \begin{bmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$, $u = \tau / Ml^2$, y = θ, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

E) Déterminer les modes du système ou encore les valeurs propres de A. Le système est-il stable, en limite de stabilité ou instable. Est-il naturellement stable, si oui qu'avons nous oublié dans la modélisation.

F) Déduire la fonction de transfert du système

I) Le système est-il observable. Si oui donner la structure de l'observateur et la commande associée à appliquer pour asservir le point d'équilibre souhaité. On demande uniquement la structure analytique, pas les calculs.

J) Faire le schéma bloc du régulateur/observateur proposé en I) et donner la solution analytique du correcteur K(s) tel que votre schéma soit équivalent au schéma général suivant