ESISAR 3ème Année d'études
AC- AC321: Commande des systèmes linéaires (rep interne)
Département **: AUTOMATIQUE**
web : http://koenig-damien.jimdo.com
e-mail : damien.koenig@esisar.grenoble-inp.fr

EXAMEN FINAL DE COMMANDE ET OBSERVATION MODALE

1 PROBLÈME TOTAL PTS : 4 + 1.5 + 2.5 + 3 + 5 + 6 = 22

On considère un système bille - rail, comme décrit sur la figure ci-dessous

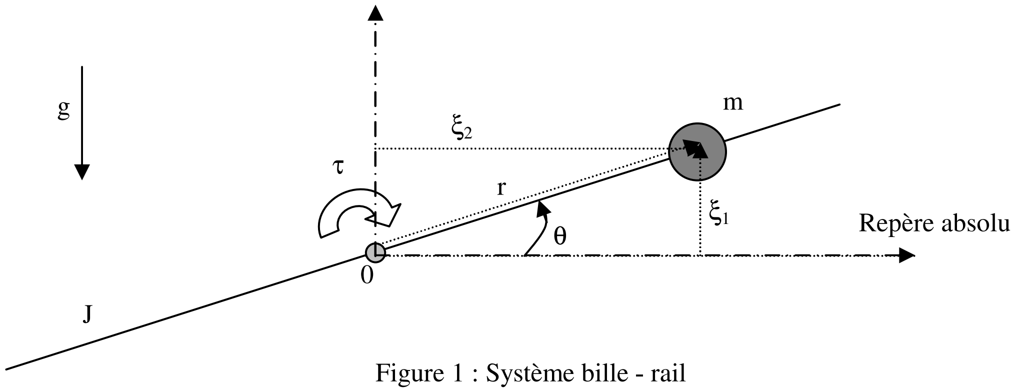

Figure 1 : Système bille - rail

La bille de masse m est assujettie à glisser sans frottement sur un rail dont l'inclinaison θ par rapport à l'horizontale peut être modifiée par un moment τ.

1.1 Modélisation (4pt)

En notant m la masse de la bille, g la constante de gravitation, r la position de la bille et J le moment d'inertie du rail, montrer que les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} + g\sin\theta - r\dot{\theta}^2 \\ \tau &= (mr^2 + J)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos\theta \end{aligned} \tag{1-1}$$

Aide : On pourra utiliser la méthode d'Euler – Lagrange décrite en TP.

Rappel : Les équations d'Euler – Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = u_i \tag{1-2}$$

où L est le Lagrangien formé par :

$$L(q, \dot{q}) = T(q_1, \cdots q_n, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_n) - V(q_1, \cdots q_n) \tag{1-3}$$

et u_i sont les forces généralisées (forces, moments) appliquées aux degrés de liberté correspondants. $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ est l'énergie cinétique, M(q) matrice symétrique composée des termes inertiels (J, m) et V est l'énergie potentielle.

Remarque : Toute autre méthode donnant les mêmes résultats est acceptée.

1.2 On applique une commande en accélération $u = \ddot{\theta}$ par application d'une transformation

non linéaire inversible $\tau \to u$ (1,5 pt)

$$\tau = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos\theta + \left(mr^2 + J\right)u \qquad (1\text{-}4)$$

pour obtenir le modèle non-linéaire suivant, beaucoup plus simple :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - g\sin x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\dot{x}} = f\left(\underline{x}, \quad u\right) \qquad (1\text{-}5)$$

où $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta$ et $x_4 = \dot{\theta}$. Déterminer les positions d'équilibre du système.

1.3 Obtenir un modèle linéaire du système au voisinage de r = 0 et θ = 0 et étudier sa stabilité au voisinage de ce point (2,5 pt)

Il s'agit de déterminer le modèle $\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + Bu$, les modes du système, et de conclure sur la stabilité ou non de ces modes (on prendra pour les applications numériques g = 9).

1.4 On admet que le modèle linéarisé tangent au voisinage de r = 0, θ = 0 est (3 pt)

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = A\underline{x} + Bu \qquad (1\text{-}6)$$

Etudié la commandabilité et l'observabilité du système linéarisé suivant que l'on observe y = r ou y = θ.

1.5 On considère toujours le modèle linéarisé tangent précédent, choisir une sortie convenable et élaborer un observateur/régulateur (5pt)

On choisira un retour négatif $u = -K\underline{\hat{x}}$ pour stabiliser le système à sa position d'équilibre. On placera les pôles du régulateur en $-1 \pm i$, $-2 \pm i$ (2pt), et ceux de l'observateur identité en $-3 \pm i$, $-4 \pm i$ (2pt). Faire un schéma bloc du système commandé et observé (1pt, les matrices A, B, C, K et G suffisent).

Aide : $[\lambda - (-1+i)][\lambda - (-1-i)][\lambda - (-2+i)][\lambda - (-2-i)] = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 15\lambda^2 + 18\lambda + 10$

$[\lambda - (-3+i)][\lambda - (-3-i)][\lambda - (-4+i)][\lambda - (-4-i)] = \lambda^4 + 10\lambda^3 + 39\lambda^2 + 70\lambda + 50$

1.6 Le système est en réalité perturbé en entrée par une perturbation constante w (6pt)

Cette entrée inconnue w(t) vient perturber r, c'est à dire :

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} w = A\underline{x} + Bu + Ew \qquad (1\text{-}7)$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = C\underline{x}$$

Montrer que l'observateur / régulateur précédent est biaisé (1.5 pt). Proposé un nouvel observateur / régulateur basé sur une commande intégrale et montrer que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0 \quad \forall \ w$ (3pt). Vérifier auparavant pour g = 9 que le système augmenté est commandable (1.5 pt).

Aide : Le système (1-7) est augmenté d'un état $\tilde{y}$ égal à l'intégrale de l'écart $y - y_{désirée}$, soit $\dot{\tilde{y}} = y - y_{desirée}$.

Remarque 1: Dans notre étude la sortie $y_{désirée}$ est nulle. **Remarque 2** : 0n ne demande pas de calculs numériques pour cette dernière question sauf pour la vérification de la commandabilité.