ESISAR 3ème ANNEE D'ETUDES

Département : AUTOMATIQUE

Damien KOENIG

Durée de l'épreuve : 1h45

1 feuille A4 R/V manuscrites et calculatrices autorisées

EXAMEN AC321 : COMMANDE MODALE

1 EXERCICE

On considère le système décrit par le modèle suivant :

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{(1-p)}{\left(p^2 + (1+\alpha)p + \alpha\right)} \tag{1-1}$$

1.1 Donner les équations d'état de ce système en prenant les variables de phase comme composantes du vecteur d'état.

1.2 Ce système est - il complètement commandable ? Interpréter.

1.3 Ce système est - il complètement observable ? Interpréter.

1.4 Commande par retour d'état.

On se place dans le cas où $\alpha > 0$. On effectue une commande par retour d'état positif de la forme :

$$u = Kx + hv_{ref} \tag{1-2}$$

où K est une matrice et h un près-filtre.

1.5 A quelles conditions sur les coefficients de K le système en boucle fermée est-il stable ?

1.6 On veut obtenir en boucle fermée une valeur propre réelle double λ_0=-2. Pour α=2 déterminer la matrice K solution du problème posé.

1.7 Déterminer h tel que le gain statique du transfert $\frac{y}{v_{ref}}$ soit unitaire.

1.8 Donner le transfert de boucle (loop) et en déduire la fonction de sensibilité S et la sensibilité complémentaire T

1.9 Tracer les modules des fonctions loop, S et T.

1.10 Rejet de pertubation et suivi de consigne constante

On considère le système (1-1) pertubé en entrée par une rampe, donner le schéma bloc regulateur/observateur solution du problème. On demande un tracé soigné : entrée(s) et sorti(e)s de chaque bloc, la structure de la commande et la structure de l'observateur. Pas de caculs, juste une analyse.

PONT ROULANT

On considère le pont roulant de la figure 1. Il est constitué d'un chariot mobile se déplaçant sur un rail horizontal et d'un câble de longueur L_1 supposé rigide et de masse négligeable au bout duquel sont fixés des objets de masses variables. Ce type de grue sert par exemple à charger ou décharger des containers ou à déplacer des objets volumineux dans des hangars. La position du câble est repérée par rapport à la verticale par l'angle θ. L'abscisse du chariot est repéré par la variable x_1.

On note OX l'axe horizontal sur le quel se déplace le chariot et OZ l'axe verticale descendant. g est l'accélération de la pesanteur. On suppose la charge m ponctuelle et l'on note f(t) la force horizontale exercée sur le chariot à l'instant t. On supposera que la totalité du mouvement est dans le plan vertical passant par le rail.

Avec les notations de la figure 1, l'objectif est par exemple de transporter un objet de l'abscisse x^0 à l'abscisse x^1, les angles de départ et d'arrivée étant respectivement θ^0 (donné) et $\theta^1=0$ la position finale (étant stable).

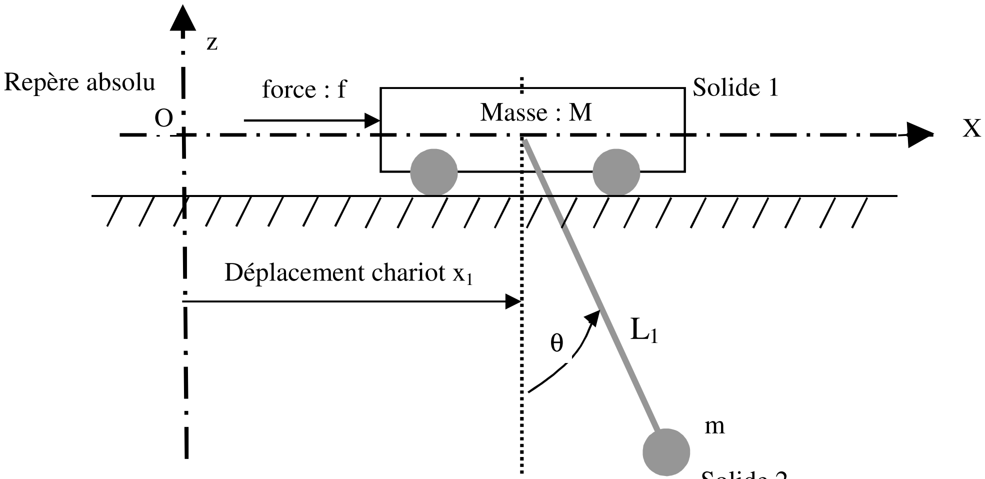

Figure 1: Pont roulant

A N : M =m = 10^4kg, M = 2kg, L_1 = 10m, g =10 $m.s^{-2}$

2 MODELISATION NON – LINEAIRE (NL)

a) Montrer par le principe de Hamilton (i.e., Euler – Lagrange) et avec les notations de la figure 1, que les équations régissant le mouvement du chariot (de masse M) et de la masse transportée (masse m) sont décrits par les équations d'Euler - Lagrange suivantes :

$$(m+M)\ddot{x}_1 + mL_1\ddot{\theta}\cos\theta - mL_1\dot{\theta}^2\sin\theta = f$$

$$L_1\ddot{\theta} + \ddot{x}_1\cos\theta = -g\sin\theta$$

Aide : On montrera d'abord que

(10mn) L'énergie cinétique $T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}mL_1^2\dot{\theta}^2 + m\dot{x}_1 L_1\dot{\theta}\cos\theta$

(2mn) L'énergie potentiel $V = -mgL_1\cos\theta$ (le signe – est dû au sens de l'axe z)

Définissez alors le Lagrangien L=T-V en fonction de x_1, θ, $\dot{x}_1$, $\dot{\theta}$ et déterminez

$$\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right) = ?$$

$$\left(\frac{\delta L}{\delta q_i}\right) = ?$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right) = ?$$

pour i=1,2, $q_1=x_1$, $q_2=\theta$ et $\dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$

En déduire les équations d'Euler - Lagrange énoncées dans a).

Rappel : $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\right)(q, \dot{q}) - \left(\dfrac{\delta L}{\delta q_i}\right)(q, \dot{q}) = u_i$ où u_i sont les forces et couples externes au système associée à q_i.

3 LINEARISATION

a) Monter que l'équilibre physiquement réalisable est $\theta = \dot{\theta} = f = 0$.

b) On désire se placer dans le cas où l'angle θ(t) reste toujours petit (<15°), ainsi que sa dérivée. Donner l'expression littérale des équations d'Euler – Lagrange, lesquels sont linéarisées à l'ordre 1 autour de l'équilibre considéré.

c) Application numérique : poser $f(t) = 10^4 u(t)$ et M =m = 10^4kg, L_1 = 10m, g =10 m.s^{-2}, en déduire sans inversion de matrice que $\ddot{x}_1 = u + 10\theta$ et $\ddot{\theta} = -2\theta - \dfrac{1}{10}u$

d) En déduire la représentation d'état $\dot{x} = Ax + Bu$ avec $x(t) = (x_1 \ \ \dot{x}_1 \ \ \theta \ \ \dot{\theta})^T$

e) On suppose que l'on observe la quantité $y = x_1 + L_1\theta$, avec L_1=10, donner la matrice C.

f) On suppose le système complètement commandable et l'état x accessible à la mesure. On souhaite passer de l'état initial $x^0 = (0 \quad 0 \quad 5pi/180 \quad 0)^T$ à l'état final $x^1 = (1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ en un temps raisonnable sans trop d'oscillations, donner l'expression litérale de la commande a appliquer et la fonction matlab avec les paramètres d'E/S solution de ce problème d'asservissement.

Merci pour l'echange au cours de ce dernier semestre, ce fût un plaisir de partager avec vous mes qlq connaissances. Passez un agréable été.

Damien Koenig