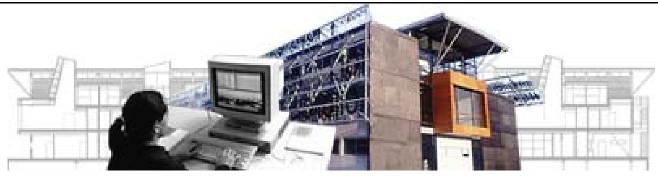
ESISAR 5ème Année d'études
AC- AC321: Commande des systèmes linéaires (rep interne)
Département **: AUTOMATIQUE**
web : http://koenig-damien.jimdo.com
e-mail : damien.koenig@esisar.grenoble-inp.fr



EXAMEN FINAL AC321 - VENDREDI 7 JUIN 2013

Commande des systèmes linéaires – représentation interne

1 feuille A4 R/V autorisée manuscrite. Toutes calculatrices autorisées. Durée : 1H45.

1 PROBLÈME TOTAL PTS : 4 + 1.5 + 2.5 + 3 + 5 + 6 = 22

On considère un système bille - rail, comme décrit sur la figure ci-dessous

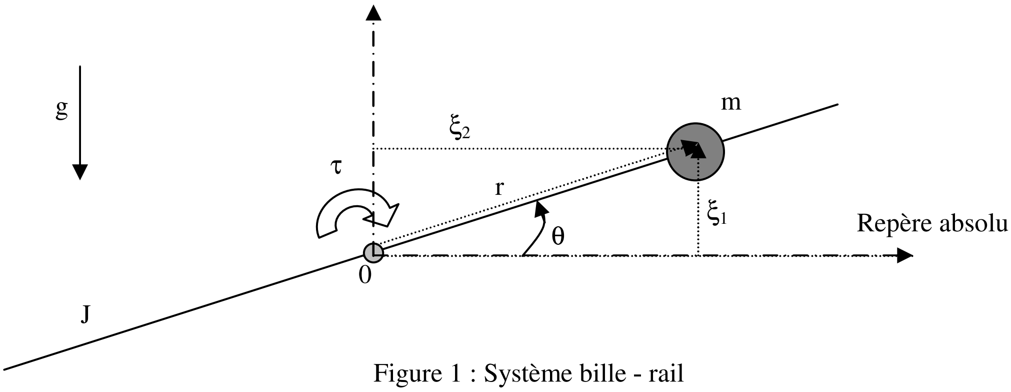


Figure 1 : Système bille - rail

La bille de masse m est assujettie à glisser sans frottement sur un rail dont l'inclinaison θ par rapport à l'horizontale peut être modifiée par un moment τ.

1.1 Modélisation NL (4pt)

En notant m la masse de la bille, g la constante de gravitation, r la position de la bille et J le moment d'inertie du rail, montrer que les équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} 0 &= \ddot{r} + g\sin\theta - r\dot{\theta}^2 \\ \tau &= (mr^2 + J)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos\theta \end{aligned} \tag{1-1}$$

Aide : On pourra utiliser la méthode d'Euler – Lagrange décrite en TP.

Rappel : Les équations d'Euler – Lagrange sont :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) = u_i \tag{1-2}$$

où L est le Lagrangien formé par :

$$L(q, \dot{q}) = T(q_1, \cdots q_n, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_n) - V(q_1, \cdots q_n) \tag{1-3}$$

et u_i sont les forces généralisées (forces, moments) appliquées aux degrés de liberté correspondants. $T = \frac{1}{2}\dot{q}^T M(q)\dot{q}$ est l'énergie cinétique, M(q) matrice symétrique composée des termes inertiels (J, m) et V est l'énergie potentielle.

Remarque : Toute autre méthode donnant les mêmes résultats est acceptée.

1.2 On applique une commande en accélération $u = \ddot{\theta}$ par application d'une transformation non linéaire inversible $\tau \rightarrow u$ (1,5 pt)

$$\tau = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr\cos\theta + \left(mr^2 + J\right)u \qquad (1\text{-}4)$$

Montrer que l'on obtient le modèle non-linéaire suivant, beaucoup plus simple :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - g\sin x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\dot{x}} = f\left(\underline{x}, \quad u\right) \qquad (1\text{-}5)$$

où $x_1 = r$, $x_2 = \dot{r}$, $x_3 = \theta$ et $x_4 = \dot{\theta}$.

Déterminer les positions d'équilibre du système.

La partie ci-dessous est indépendante de la question 1.1

il est donc possible de répondre à l'ensemble des questions sans avoir réussi la question 1.1.

1.3 Obtenir un modèle linéaire du système au voisinage de r = 0 et θ = 0 et étudier sa stabilité au voisinage de ce point (2,5 pt)

On demande de déterminer le modèle d'état, les modes du système et de conclure sur la stabilité ou non de ces modes.

$$\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + Bu\,,$$

AN : On prendra pour les applications numériques $g = 9$.

1.4 On admet que le modèle linéarisé tangent au voisinage de r = 0, θ = 0 est (3 pt)

$$\underline{\dot{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u = A\underline{x} + Bu \qquad (1\text{-}6)$$

Etudié la commandabilité et l'observabilité du système linéarisé pour les 2 cas suivant :

- Cas 1 : On observe uniquement r soit $y = r$
- Cas2 : On observe uniquement θ soit $y = \theta$.

1.5 On considère toujours le modèle linéarisé tangent précédent, choisir une sortie convenable et élaborer un observateur/régulateur (5pt)

On choisira un retour négatif $u = -K\hat{\underline{x}}$ pour stabiliser le système à sa position d'équilibre.

On placera les pôles du régulateur K en $-1 \pm i$, $-2 \pm i$ (2pt) et ceux de l'observateur identité en -3 $\pm i$, $-4 \pm i$ (2pt).

Voir aide ci-après.

Faire un schéma bloc du système commandé et observé (1pt, les matrices A, B, C, K-contrôleur et G observateur suffisent).

Aide : $[\lambda-(-1+i)][\lambda-(-1-i)][\lambda-(-2+i)][\lambda-(-2-i)]=\lambda^4+6\lambda^3+15\lambda^2+18\lambda+10$

$[\lambda-(-3+i)][\lambda-(-3-i)][\lambda-(-4+i)][\lambda-(-4-i)]=\lambda^4+10\lambda^3+39\lambda^2+70\lambda+50$

Donner le transfert de boucle littéral (sans effectuer de calculs numérique) sans observateur

Donner le transfert de boucle littéral (sans effectuer de calculs numérique) avec observateur. Aide, calculer d'abord le transfert u/y puis multiplier ce résultat par le modèle linéaire du process y/u=G(p).

1.6 Le système est en réalité perturbé en entrée par une perturbation constante w (6pt)

Cette entrée inconnue w(t) vient perturber r, c'est à dire :

$$\dot{\underline{x}}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&-g&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\underline{x}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u+\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}w=A\underline{x}+Bu+Ew \qquad (1\text{-}7)$$
$$y=\begin{pmatrix}1&0&0&0\end{pmatrix}\underline{x}=C\underline{x}$$

Montrer que l'observateur / régulateur précédent est biaisé (1.5 pt).

Proposer un nouvel observateur / régulateur basé sur une commande intégrale et montrer que $\lim_{t\to\infty} y(t)=0 \quad \forall \ w$ (3pt).

Vérifier auparavant pour g = 9 que le système augmenté est commandable (1.5 pt).

Aide : Le système (1-7) est augmenté d'un état $\tilde{y}$ égal à l'intégrale de l'écart $y-y_{désirée}$, soit $\dot{\tilde{y}}=y-y_{desirée}$.

Remarque 1: Dans notre étude la sortie $y_{désirée}$ est nulle.

Remarque 2 : 0n ne demande pas de calculs numériques pour cette dernière question sauf pour la vérification de la commandabilité.

« C'est le rôle essentiel du professeur d'éveiller la joie de travailler et de connaître. » Albert Einstein

J'espère vous avoir partagé un peu de ma passion, au plaisir de vous retrouver en cours de commande optimale. Damien