ESISAR 4ème ANNEE D'ETUDES

Module AC-431 : Commande Optimale

Département : AUTOMATIQUE

Damien Koenig : http://koenig-damien.jimdo.com

TD1 : Principe d'optimalité et Commande Optimale

1. Application du principe d'optimalité sur un cas simple en temps discret

Considérons le système discret représenté par son équation d'état en temps discret :

$$x_{k+1} = x_k + u_k$$

avec pour valeur initiale $\boldsymbol{x_0}$ à l'instant initial $\boldsymbol{k = 0}$.

On désire minimiser la fonction coût suivante : $J = \sum_{k=0}^{K-1} u_k^2 + x_K^2$

a) Par application directe du principe d'optimalité de Bellman, déterminer la commande optimale $\boldsymbol{u_k^*}$ à appliquer à chaque instant $\boldsymbol{k}$ de manière à minimiser le coût $\boldsymbol{J}$ en fonction d'un état initial $\boldsymbol{x_0}$ quelconque lorsque $\boldsymbol{K = 3}$.

b) Retrouver les résultats précédents en utilisant les résultats obtenus en cours dans le cas d'un régulateur linéaire quadratique à horizon fini en temps discret.

c) Que devient la commande dans le cas d'un horizon infini ?

d) Reprendre **c)** mais avec $J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_k^2 + R u_k^2 \right)$, discuter du comportement du système en boucle fermée en fonction de la valeur prise par la pondération $\boldsymbol{R}$.

2. Optimisation en temps continu

On considère le problème de commande optimale en boucle fermée :

$$\min_u \int_0^T \left(x^2 + u^2 \right) dt + 10 x(T)^2$$

$$\text{sous} \qquad \dot{x} = -x + 2xu$$

Par la méthode de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) :

a) Donner les équations à résoudre dans le cas d'un horizon $\boldsymbol{T}$ fini donné.

b) Pour un horizon infini ($\mathbf{T} \to +\infty$), déterminer l'expression de la commande $\boldsymbol{u(t)}$.