ESISAR 4ème ANNEE D'ETUDES

Module AC-431 : Commande Optimale

Département : AUTOMATIQUE

Damien Koenig : http://koenig-damien.jimdo.com

TD3 : SUIVI DE TRAJECTOIRE & SUIVI AVEC REJET DE PERTURBATION

1 EXERCICE 1 : SUIVI DE TRAJECTOIRE NON CONSTANTE

Commande optimale d'un système du premier ordre représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(p) = \frac{1}{1+p} = \frac{Y(p)}{U(p)} \tag{1-1}$$

où : Y(p) est la sortie du procédé et U(p) la commande.

On se propose de déterminer la loi de commande u(t) à appliquer au procédé G(p), telle que le critère :

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T (x(t) - r(t))^2 dt \tag{1-2}$$

soit minimal. x(t) est l'état interne du système, il correspond à la sortie du procédé et $r(t) = t^2 \frac{e^{-t}}{2}$ est la référence à suivre.

1.1 Donner la représentation d'état du système et l'Hamiltonien solution du problème

On calculera respectivement : $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$, $\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}$, $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$, $\frac{dH}{dt} = 0$.

1.2 En déduire la trajectoire optimale $x_{opt}(t)$ et la commande optimale $u_{opt}(t)$.

1.3 Poser l'Hamiltonien, tel que la contrainte sur l'actionneur $u(t) \le U_0$ soit satisfaite.

RAPPEL :

Système : $\dot{x} = f(x, u, t)$

Critère : $J = \int_0^T L(x, u, t) dt$

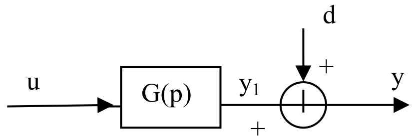
Hamiltonien : $H = -L(x,u,t) + p_x^T f(x,u,t)$

où p_x est le vecteur des variables adjointes associé au système. Si le système est linéairement invariant dans le temps (A, B, C constants) alors $\frac{dH}{dt} = 0$.

Résolution : $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$, $\left\{ \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}; \quad p_x(T) = -\frac{\partial C_f}{\partial x(T)} \right\}$, $\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u=u^*} = 0$, $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$.

2 EXERCICE : SYNTHESE LQ D'UN SYSTEME DU PREMIER ORDRE PERTURBE EN SORTIE

On considère le schéma bloc suivant



Le procédé est modélisé par un premier ordre $G(p)=\dfrac{1}{p+2}=\dfrac{y_1(p)}{u(p)}$ où d représente une perturbation constante présente sur la sortie y. On propose de minimiser le critère suivant

$$\min_u J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(y^2+\tilde{y}^2+Ru^2\right)dt$$

Où $\tilde{y}(t)=\int_0^t \left(y(v)-y_{ref}\right)dv$ représente l'intégrale de l'erreur de poursuite et R une matrice de pondération..

L'objectif est de déterminer le gain de correction par retour intégral tel que $\lim_{t\to\infty} y(t)\to y_{ref} \quad \forall d=cte.$

a) Proposer une représentation d'état du procédé perturbé et en déduire A et B :

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=x+d$$

b) Donner la représentation d'état du système augmenté de l'état $\tilde{y}(t)$, on posera :

$$\dot{x}_a=A_a x_a+B_a u+Ey_{ref}+Fd$$
$$y=C_a x_a+d$$

avec $x_a=\begin{bmatrix} x \\ \tilde{y}\end{bmatrix}$ et $\dot{\tilde{y}}=y-y_{ref}$. En déduire le critère J en fonction de l'état du système augmenté.

c) Donner le schéma bloc associé au problème de commande

d) Donner la solution X de l'équation algébrique de Riccati (ARE) solution du problème pour R=1 et R=10.

e) En déduire le gain optimal pour R=1.

f) Déterminer le transfert de boucle pour R=1. Qu'observez-vous en basse fréquence (p=0).

g) En déduire la fonction de sensibilité pour R=1 et tracé son bode (uniquement le module). En déduire la marge de module et la précision.

h) Que se passe t-il si on augmente R.

On considère maintenant que le système est également perturbé par des bruits sur l'état et la mesure, que faut-il faire pour assurer notre objectif de suivi et éviter que la commande soit sollicitée par ces dynamiques rapides.