ESISAR 4ème ANNEE D'ETUDES

Module AC-431 : Commande Optimale

Département : AUTOMATIQUE

Damien Koenig : http://koenig-damien.jimdo.com

TD4 : OPTIMISATION SOUS CONTRAINTE FINALE

1 EXERCICE 1 : OPTIMISATION DE LA PRODUCTION

Une usine fabrique un certain produit dont le stock est noté x et le taux de production $u = \dot{x}$. On considère un stock initial nulle et l'on désire produire une quantité Q=10 en un temps donné T=10, le coût de production étant $J = \int_0^T \left\{ bx + \frac{a}{2} u^2 \right\} dt$ avec a=5 et b=1.

a) On note λ le paramètre de Lagrange associé à la contrainte finale x(T)=Q, donner alors le coût final solution du problème.

b) Donner l'Hamiltonien solution du problème.

c) En déduire la commande optimale solution du problème, le coût associé et la quantité x(T).

d) Comparer le coût optimal avec le coût correspondant à une production u à taux constant qui satisfasse la contrainte x(T)=Q.

Rappels

Système : $\dot{x} = f(x,u,t)$ où $f(x,u,t) = u$

Critère : $J = \int_0^T L(x,u,t) dt$

où $L(x,u,t) = bx(t) + \frac{a}{2} u^2(t)$

Coût final : $C_f = \lambda(x(T) - Q)$, car on désire tenir compte de la contrainte finale $x(T) = Q$, λ est le mutliplicateur de Lagrange associé à la contrainte.

Hamiltonien : $H = -L(x,u,t) + p^T f(x,u,t)$ où p est le vecteur des variables adjointes associé au système

soit $H = -bx(t) - \frac{a}{2} u^2(t) + p_x u$ où p_x est l'état adjoint associé au système $\dot{x} = u$

Remarque : Pour un système LTI (A, B et C constant), la dérivée temporelle de l'Hamiltonien est nulle :

- Si système LTI alors $\dot{H}(t) = 0$.
- Si $T \to \infty$ vers l'infini et Sys LTI alors H=0.