ESISAR 4ème ANNEE D'ETUDES

Département : AUTOMATIQUE

Damien KOENIG : Exam AC423

Commande optimale

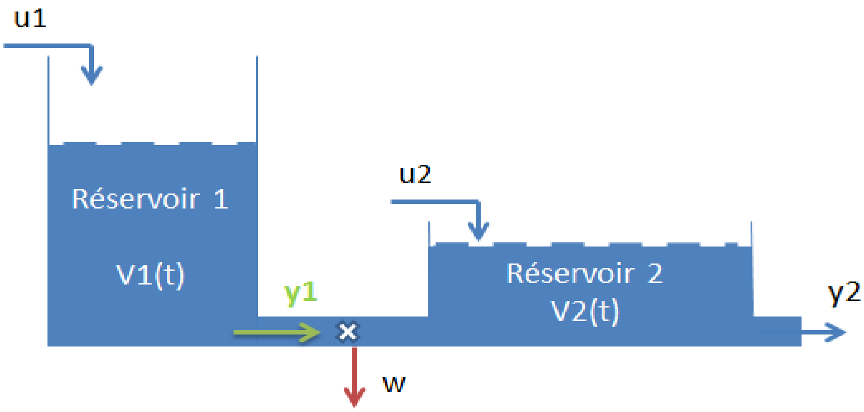
11/12/2017 http://koenig-damien.jimdo.com

EXAMEN: AC 423 COMMANDE OPTIMALE

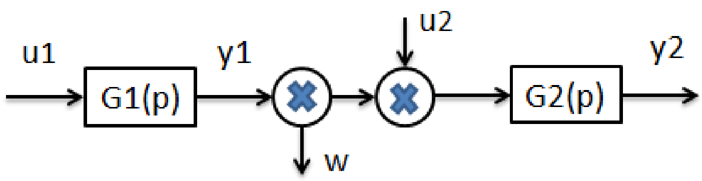
Une feuille A4 Recto/Verso avec contenu manuscrit libre et une calculatrice. Durée de l'épreuve : 1h30

1 PROBLEME DE REGULATION DEBIT

On considère le système suivant :



Lequel est représenté sous sa forme simplifiée par le schéma bloc :



Où u1 est le débit (m3/s) entrant du réservoir 1 de volume V1(m3), u2 est le débit (m3/s) entrant du réservoir 2 de volume V2 (m3), w (m3/s) est un débit de fuite entre le réservoir 1 et 2 et y1 (m3/s) est le débit mesuré de sortie du réservoir 1, y2 (m3/s) est le débit mesuré de sortie du réservoir 2. Chaque sortie est fonction de l'état interne Vi par la relation non linéaire $y_i(t) = k_i\sqrt{\dfrac{V_i(t)}{S_i}}; i = 1, 2$ ou Si est la section du réservoir i et ki une constante déterminée expérimentalement.

1.1 Sachant que le Volume entrant = Volume accumulé + Volume sortant, montrer que G1(p) et G2(p) sont représentés respectivement après une linéarisation à l'ordre 1 par un système du premier ordre. On donnera les équations différentielles de chaque système sans entrer dans le détail de la linéarisation (vue en 3a en TP).

1.2 Donner la représentation d'état complète du système sous sa forme littérale

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Ew \\ y = y_2 = Cx \end{cases} \quad \text{où } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \text{ et } x = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

1.3 Donner le problème de commande optimale solution du problème, telle que le débit de sortie y tend vers un débit yref constant. Hypothèse, le débit de fuite w est considéré constant.

1.4 Donner le schéma bloc de votre commande

1.5 Partant du critère suivant à horizon infini, donner le critère en fonction du système augmenté

$$\min_u J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(y^2 + \tilde{y}^2 + Ru^2\right)dt$$

où $\dot{\tilde{y}} = y - y_{ref} \Leftrightarrow \tilde{y}(t) = \int_0^t \left(y(v) - y_{ref}\right)dv$

et y_{ref} est une référence constante est R une matrice de pondération.

Précisez les matrices de pondération Qa et Ra telle que :

$$\min_u J = \frac{1}{2}\int_0^\infty x_a^T Q_a x_a + u^T R_a u dt$$

Le système augmenté est de la forme suivante :

$$\dot{x}_a = A_a x_a + B_a u + E_a w + D_a y_{ref}$$
$$y = C_a x_a$$

où $x_a = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \tilde{y} \end{bmatrix}$.

Précisez les matrices Aa, Ba, Ea, Da, Ca solution du problème où xa est l'état du système augmenté fonction des états V1, V2 et de l'état intégrateur $\tilde{y}(t) = \int_0^t (y - y_{ref})dt$

1.6 On donnera l'équation littérale algébrique de Riccati associé au système augmenté

1.7 La commande u solution du problème est de la forme u=-Ka*xa, donner Ka et h sous forme littérale.

1.8 Donner la fonction de sensibilité entre y et w

1.9 Donner la fonction de sensibilité complémentaire entre y et yref

Il n'y a aucun calcul dans cet exercice.

2 EXERCICE

$$\min_u \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2+u^2\right)dt \text{ sous la contrainte } \dot{x}=u\,.$$

Donner u solution du problème

Donner la représentation du système bouclé

Donner l'allure de x en fonction du temps pour un état initial xo=1

3 OPTIMISATION EN TEMPS CONTINU

On considère le problème de commande optimale en boucle fermée :

$$\min_u \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x^2+\beta u^2\right)dt \text{ sous la contrainte non linéaire } \dot{x}=-x+xu\,.$$

a) Déterminer par maximisation de l'hamiltonien, l'expression de la commande optimale u pour $\beta=1$.

b) Montrer que seule la solution positive de l'équation de Riccati est asymptotiquement stabilisante.

c) Déterminer par maximisation de l'hamiltonien, l'expression de la commande optimale u pour $\beta \to \propto$.

d) Conclure.

Rappel : Système : $\dot{x}=f(x,u,t)$; Critère : $J=\int_0^T L(x,u,t)dt$, Hamiltonien : $H=-L(x,u,t)+p_x^T f(x,u,t)$

où p_x est le vecteur des variables adjointes associé au système.

Résolution : $\dot{x}=\dfrac{\partial H}{\partial p_x}$, $\dot{p}_x=-\dfrac{\partial H}{\partial x}$, $\left.\dfrac{\partial H}{\partial u}\right|_{u=u^*}=0$, $\dfrac{\partial^2 H}{\partial u^2}<0$.

Problème proche de la partie 1 du TP (sans l'observateur), exercice 2 et 3 très proches des TD.

« Il faut toujours viser la lune car même en cas d'échec on atterrît dans les étoiles ».

Au plaisir de vous retrouver en 5ème année et merci pour votre écoute.
Damien Koenig.
PS. La 5a est plus simple. Joyeux noël.