



Méthodes de synthèse fréquentielle H_∞ pour la commande multivariable et le diagnostic de procédés (Partie 1)

- **AC515** : Volume (45h)
 - Partie 1 Synthèse H_∞
 - Partie 2 Synthèse FDI via l'espace parité et observateurs
- **Mots clés:** H_∞ , LMI, analyse, performance, robustesse, FDI
- **Analyse de performance et robustesse**
 - Approche fréquentielle
 - Modélisation LFT (application du théorème du faible gain)
- **Synthèse de lois de commande**
 - » LQG (rappel)
 - » H_∞ loop-shapping (modelage du transfert de boucle)
 - » H_∞ par pondération fréquentielle
- **Synthèse H_∞ de lois de commande robuste aux incertitudes**
 - » Application du théorème du faible gain
- **Diagnostic par synthèse LMI**
 - » Estimation de défaut(s) par synthèse de commande H_∞ mise sous forme standard
 - » Atténuation et suivi de consigne : approche H_∞ sous forme standard



Référence

- Laurent El Ghaoui Cours "Commande robuste" École Nationale Supérieure de Techniques Avancées
- Duc G., Font S., 2000, "Commande H^∞ et μ -analyse", *éditions Hermes*.
- Sigurd Skogestad et Ian Postlethwaite, 1998 « Multivariable feedback control: analysis and design" Edition John Wiley & Sons
- G. Scorletti et Vincent Fromion, 2003, "Introduction à la commande multivariable des systèmes: méthodes de synthèse fréquentielle H^∞ ", Cours de 3ème année de l'ENSI de Caen.
- Denis Arzelier, 2005, « Course on LMI Optimization with applications in Control » www.laas.fr/~arzelier

Partie 1 : Définitions des normes

□ Vecteur

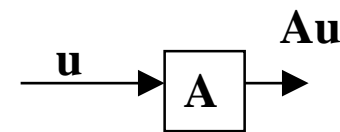
» La norme euclidienne de

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ est } \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

□ Matrices

» avec

$$\|A\|_2 = \sup_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}$$



$$\sup_{\mathbf{u} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} = \bar{\sigma}(A)$$

$$\bar{\sigma}(A) = \sqrt{\bar{\lambda}(A^T A)}$$

représente la notion de valeur singulière

□ Norme H_∞:

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{\omega} \sigma_{\max}(G(j\omega)) = \sup_{U(s) \in H_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2}$$

Interprétation : elle mesure le gain maximal de la réponse fréquentielle $G(j\omega)$

Partie 1 : Définitions des normes (vecteur, matrice, signal, système)

□ Notion de valeurs singulières

- Pour un système SISO, on définit à partir $G(s)$, le gain du système à la pulsation w , par le module

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max |G(s)|$$

- Pour un système MIMO, on utilise la notion de valeurs singulières

$$\sigma_i(G(jw)) = \sqrt{\lambda_i(G(jw)G(-jw)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-jw)^T G(jw))}$$
$$i = 1, \dots, \min(m, p)$$

- » Les valeurs singulières étant des nombres réels positifs ou nuls, elles peuvent être classées.

$$\bar{\sigma}(G(jw)) = \sigma_1(G(jw)) \geq \sigma_2(G(jw)) \geq \dots \geq \underline{\sigma}(G(jw))$$

- » Pour un système monovariante ($m=p=1$), il existe qu'une seule valeur singulière, en l'occurrence :

$$\bar{\sigma}(G(jw)) = \underline{\sigma}(G(jw)) = |G(jw)|$$

- » Les valeurs singulières constituent donc une généralisation de la notion de gain aux systèmes multivariables.

Exemple 1 : SISO

□ Notion de valeurs singulières

– Exemple 1: Système SISO

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

» Par définition

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T G(j\omega))}$$

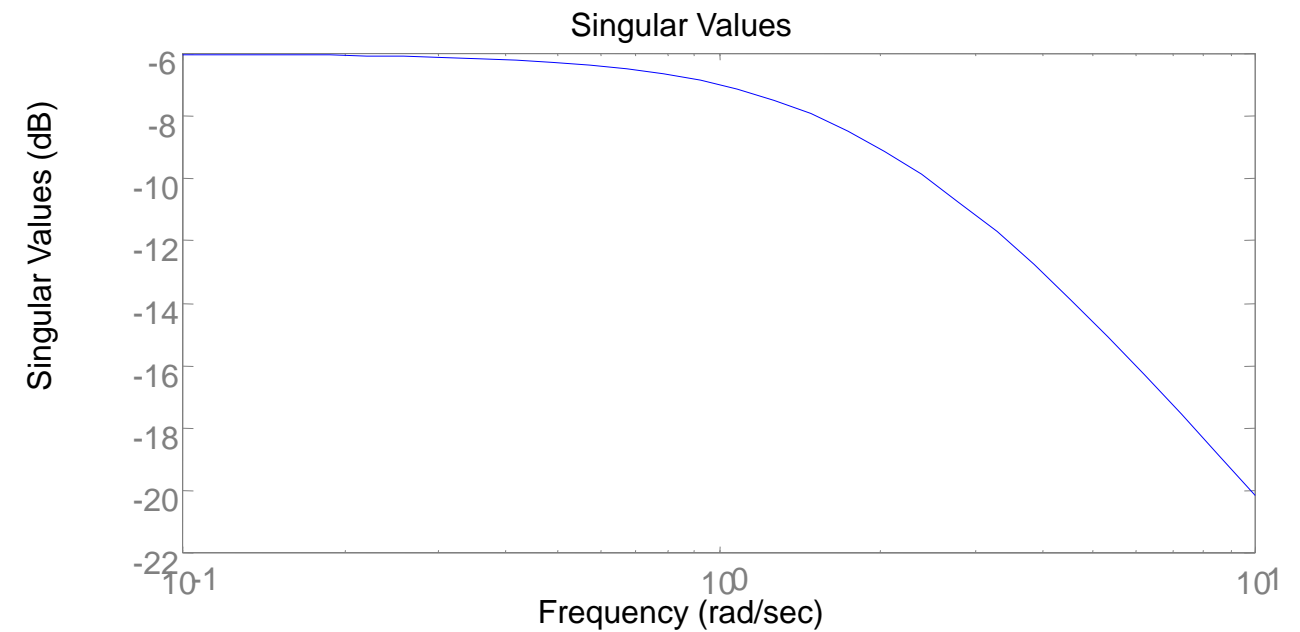
$i = 1, \min(m, p)$

» Soit

$$\sigma_1(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_1\left(\frac{1}{2+j\omega} \frac{1}{2-j\omega}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4+\omega^2}\right)}$$

» On retrouve la définition du module

$$\sigma_1(G(j\omega)) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$



Exemple 2: MIMO

Notion de valeurs singulières

– Exemple 2: Système MIMO

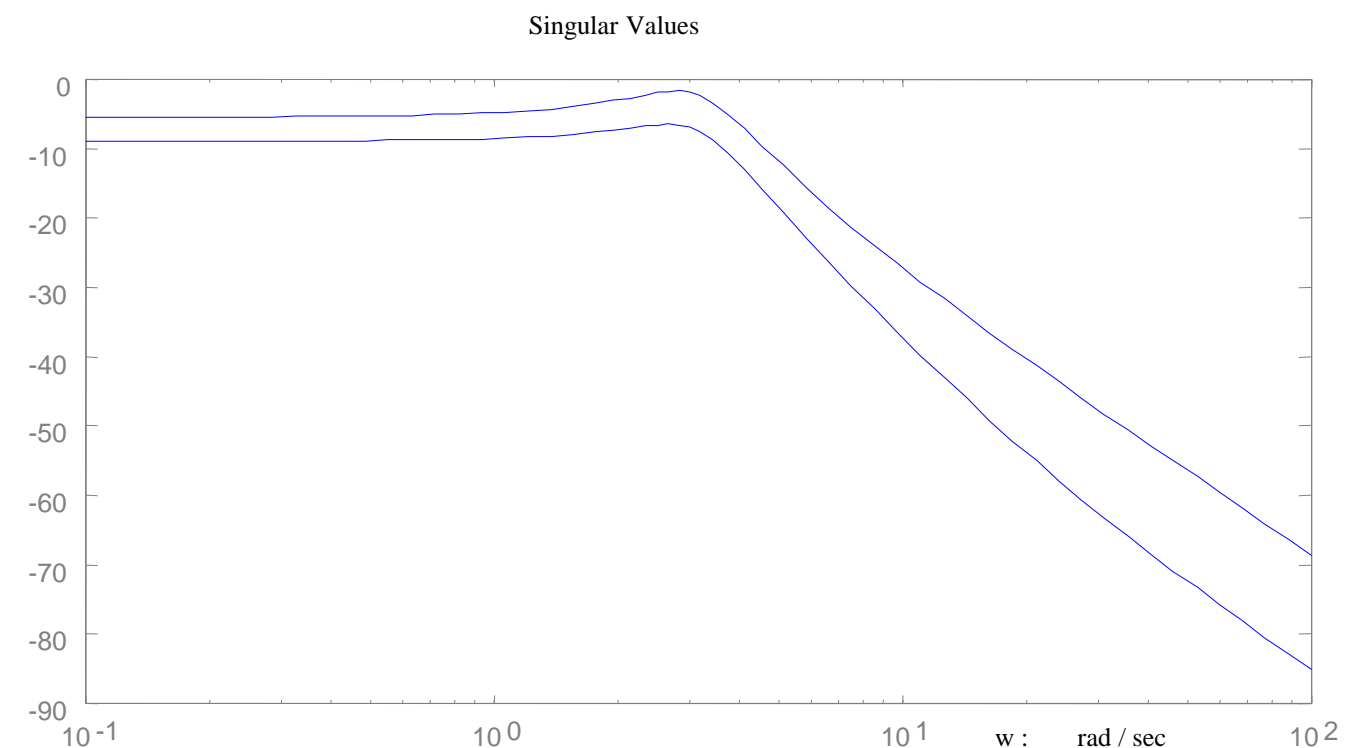
» Par définition

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T G(j\omega))}$$

$i = 1, \min(m, p)$

on obtient une matrice carrée de dimension 2×2
fonction de ω où pour chaque ω
il existe 2 valeurs propres λ_1 et λ_2
dont les racines forment respectivement
les 2 valeurs singulières σ_1 et σ_2 .

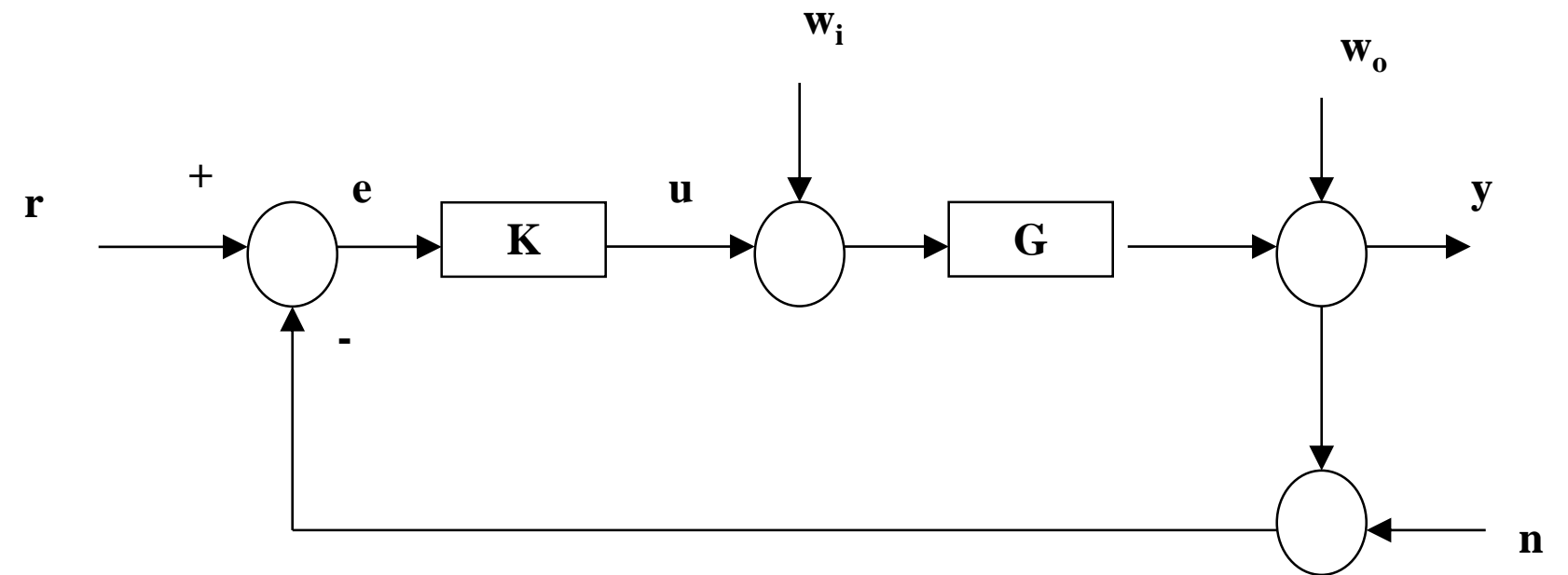
$$G_2(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+20}{(s+4)(s^2+2s+10)} & \frac{3(s+2)}{(s+4)(s^2+2s+10)} \\ -1 & 2s+15 \\ \frac{-1}{(s+4)(s^2+2s+10)} & \frac{2s+15}{(s+4)(s^2+2s+10)} \end{pmatrix}$$



Partie 1 : Boucle d'asservissement

□ Boucle d'asservissement

- » $r(t)$: consigne ou signal de référence
- » $y(t)$: signal de sortie ou réponse
- » $e(t)$: erreur de suivi (tracking error)
- » $u(t)$: commande
- » $w_i(t)$: perturbation de la commande
- » $w_o(t)$: perturbation de la sortie
- » $n(t)$: bruit de mesure



Boucle de suivi (tracking)

Partie 1 : Boucle d'asservissement

□ Propriétés des asservissements

– Stabilité

Il convient de distinguer la stabilité BIBO (bounded input/bounded output) de la stabilité interne.

- Stabilité BIBO: elle exige que l'énergie des signaux en sortie (y) soit bornée dès que l'énergie fournie en entrée (r) est bornée, i.e.,

$$\left. \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{w_i = w_o = n = 0} = T(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$$

- Stabilité interne: elle exige que tous les signaux circulant dans la boucle soient d'énergie finie, i.e.,

$$T(s) = G(s)K(s)(I + G(s)K(s))^{-1}$$

$$\left. \frac{y(s)}{w_o(s)} \right|_{w_i = n = r = 0} = S(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}$$

$$\left. \frac{u(s)}{r(s)} \right|_{w_i = w_o = n = 0} = - \left. \frac{u(s)}{n(s)} \right|_{w_i = w_o = r = 0} = K(s)S(s)$$

$$\left. \frac{y(s)}{w_i(s)} \right|_{w_o = n = r = 0} = G(s)(I + K(s)G(s))^{-1}$$

Cette notion de stabilité interne est plus restrictive mais plus importante en pratique puisque les composants à l'intérieur de la boucle sont également sensibles aux énergies infinies

Partie 1 : Boucle d'asservissement

□ Stabilité externe

– Exemple, on considère le système G avec le correcteur K suivant $G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ $K(s) = \frac{s}{s+1}$

» On obtient dès lors $\left. \frac{y(s)}{r(s)} \right|_{w_i=w_o=n=0} = T(s) = \frac{1}{1+(s+1)^2}$

» Lequel est BIBO stable, puisqu'il n'y a pas de changement de signe au dénominateur (voir critère de Routh)

□ Stabilité interne

» Instable, d'après le transfert $\left. \frac{y(s)}{w_i(s)} \right|_{w_o=n=r=0} = G(s)(I + K(s)G(s))^{-1} = \frac{s+1}{s(1+(s+1)^2)}$

» On constate qu'il y a eu simplification du pôle instable $s=0$, par un zéro de K

$$G(s)K(s) = \frac{1}{s(s+1)} \frac{s}{s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Partie 1 : Boucle d'asservissement

□ Stabilité interne

- Il est donc dangereux d'analyser la stabilité au seul vu des pôles de $S(s)$ et $T(s)$, i.e., aux racines de $\det(I+G(s)K(s))=0$
- Il faut plutôt calculer le spectre de A_{BF} à partir des réalisations minimales de G et K

» Exemple
$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

avec $u(t) = Kx(t)$.

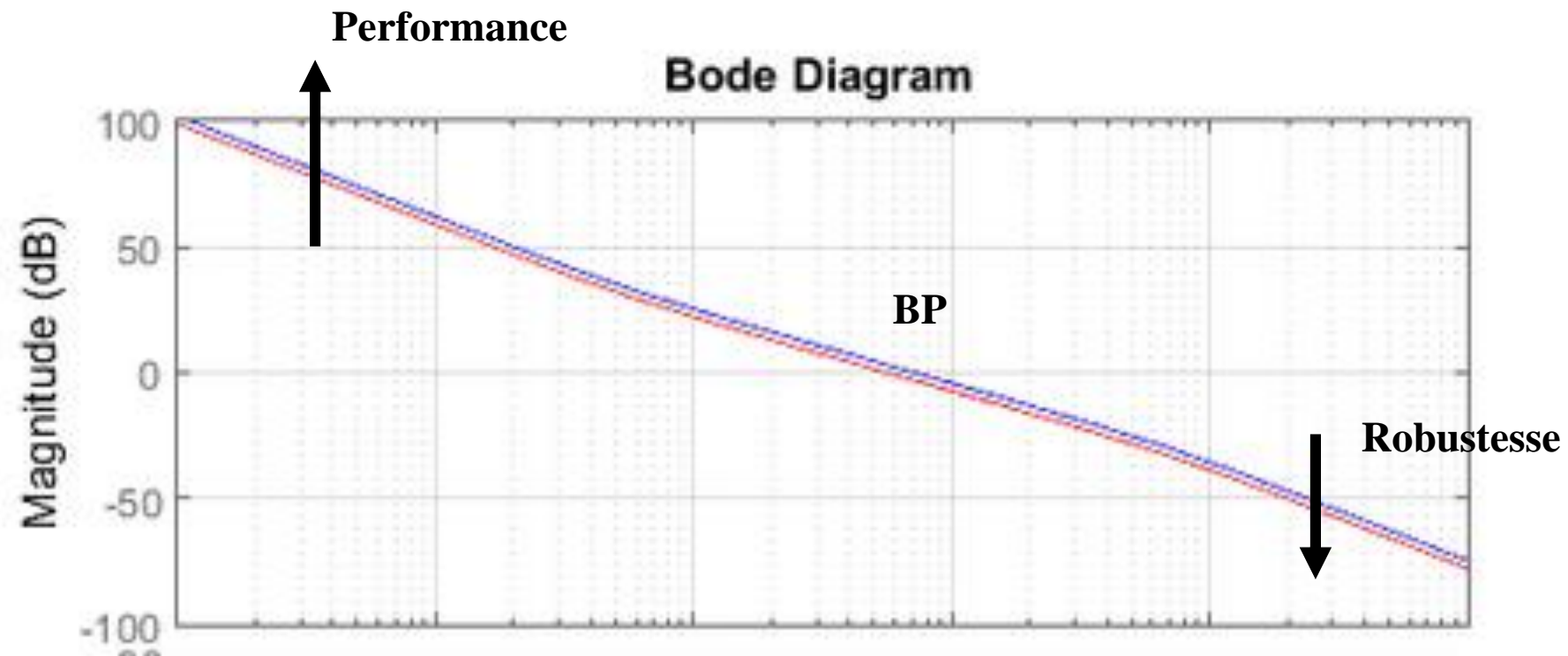
Soit $A_{BF}=A+BK$ et un spectre de $A_{BF} = \det(\lambda I - (A+BK))=0$.

Le système bouclé, présentera alors une stabilité interne si et seulement si $\Re(\lambda_i) < 0$, où λ sont les vp de A_{BF} .

Partie 1 : Boucle d'asservissement

$$\begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$$

Module idéale du transfert de boucle |KG|





Partie 1 : Boucle d'asservissement

- **Pour compléter ce raisonnement asymptotique on peut rappeler que :**
 - la marge de module (distance minimale entre un point du lieu de Nyquist et le point critique -1) est l'inverse du maximum de $|S(j\omega)|$
 - la pulsation au gain unité ω_0 de la BO : $|G(j\omega_0)K(j\omega_0)| = 1$
 - » donne une image de la BP de l'asservissement
 - » et conditionne fortement le temps de réponse $t_r \approx \omega_0 t_m$ où t_m est le temps de passage au premier maximum de la réponse indicielle
 - La BP détermine la classe de signaux l'asservissement est capable de suivre ou de contrer.
 - » Plus elle est étendue, plus l'asservissement est capable de réagir à des variations rapides.
 - » Elle mesure la zone de fonctionnement de l'asservissement.

Partie 1: Propriétés des asservissements (Compensation de pôles et/ou zéros instables)

□ Hypothèse

- pour assurer une stabilité interne en présence de pôles et/ou zéros instables on suppose qu'il n'y a pas de compensation de ces pôles et zéros entre $K(s)$ et $G(s)$ (robustesse aux incertitudes de modèle).

□ **Exemple:** $P(s) = \frac{1}{s-1}$, $K_1(s) = \frac{s-1}{s+1}$, $K_2(s) = 2$

- Le correcteur $K_1(s)$ compense le pôle instable $p=1$, on obtient dès lors pour $K_1(s)$ et $K_2(s)$ respectivement les fonctions de sensibilité complémentaire

$$T_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s+1}} = \frac{1}{s+2}, \quad T_2(s) = \frac{2}{1 + \frac{2}{s-1}} = \frac{2}{s+1}$$

- Si l'on considère maintenant une petite variation δ du pôle du procédé $P^\delta(s) = \frac{1}{s-1+\delta}$,

» On obtient

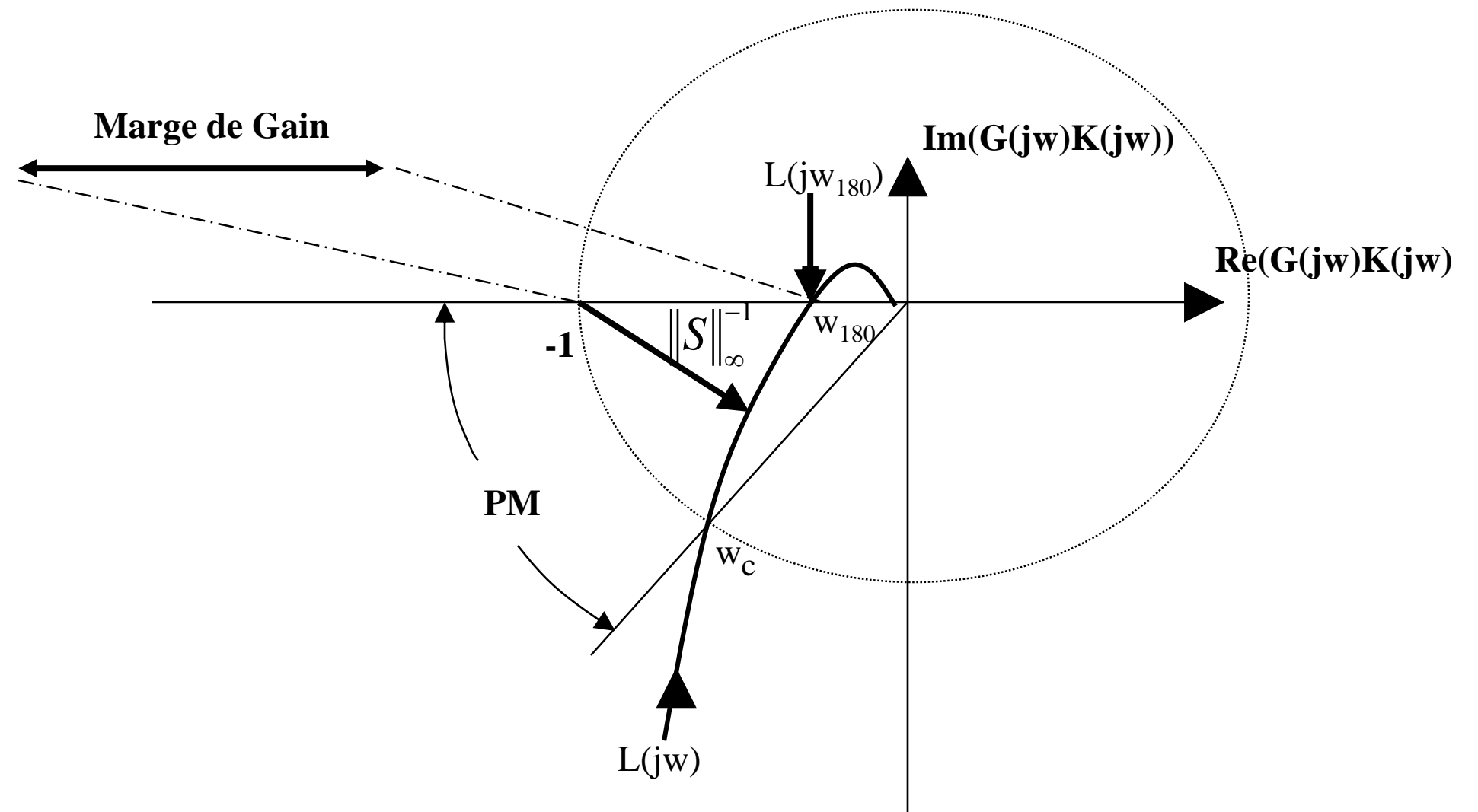
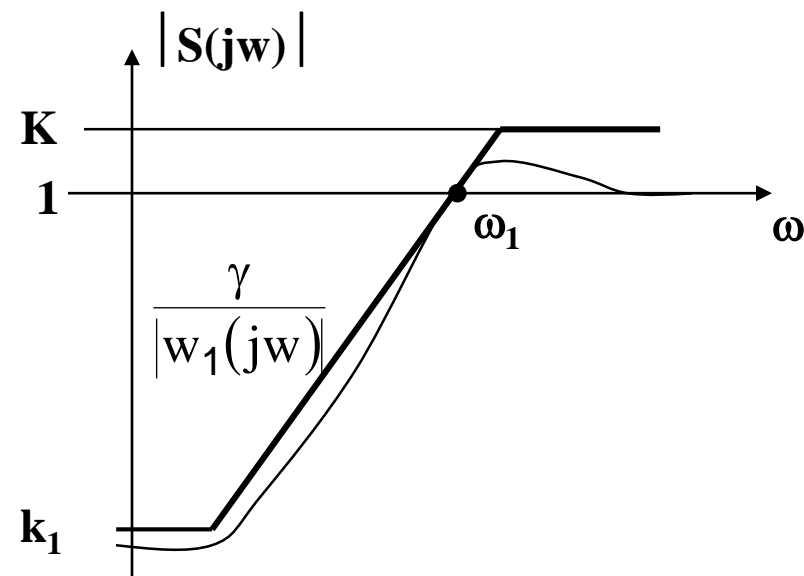
$$T_1(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{s-1+\delta}} \frac{s-1}{s+1} = \frac{s-1}{(s-1+\delta)(s+1)+s-1} = \frac{s-1}{s^2 + (\delta+1)s + \delta - 2}, \quad T_2(s) = \frac{2}{1 + \frac{2}{s-1+\delta}} = \frac{2}{s+1+\delta}$$

- » $T_1(s)$ est alors instable et ce pour une perturbation δ très faible (chg de signe dans le dénominateur)
- » Par contre $T_2(s)$ reste stable et ce pour $\delta > -1$

Relation entre S et la marge de Module

□ Marge de module

$$MM = \|S\|_{\infty}^{-1} = \bar{\sigma}(S^{-1}) = \frac{1}{K}$$





Robustesse aux incertitudes

□ On peut considérer deux classes d'incertitudes

– Incertitude paramétrique

» Comme son nom l'indique, il s'agit d'incertitude sur les paramètres : gain statique, cte de temps...

– Dynamique non modélisée, négligée

» Par exemple $G(s)=G_1(s)*G_2(s)$ où $G_2(s)$ est négligé (il peut s'agir d'un retard $e^{-\theta s}$, ou encore d'un mode $1/(\tau s+1)$)

– Où $0 < \theta < \theta_{\max}$, $0 < \tau < \tau_{\max}$

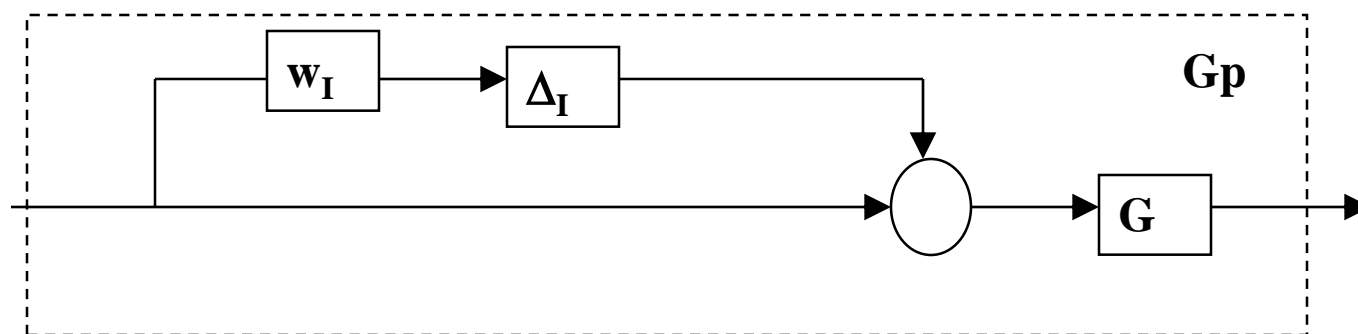
» θ_{\max} et τ_{\max} sont connus

Incertitude paramétrique

□ **Exemple : Gain incertain** $G_p(s) = k_p G_o(s)$, $k_{\min} \leq k_p \leq k_{\max}$

– Où k_p est gain incertain borné et $G_o(s)$ est un transfert nominal (i.e., sans incertitudes)

□ **On montre que l'incertitude paramétrique peut se réécrire sous la forme d'un système à incertitude multiple**



$$G_p(s) = G(s)(1 + w_I(s)\Delta_I(s)), \quad \underbrace{|\Delta_I(j\omega)| \leq 1 \forall \omega}_{\|\Delta_I\|_\infty \leq 1}$$

Système avec incertitude multiple

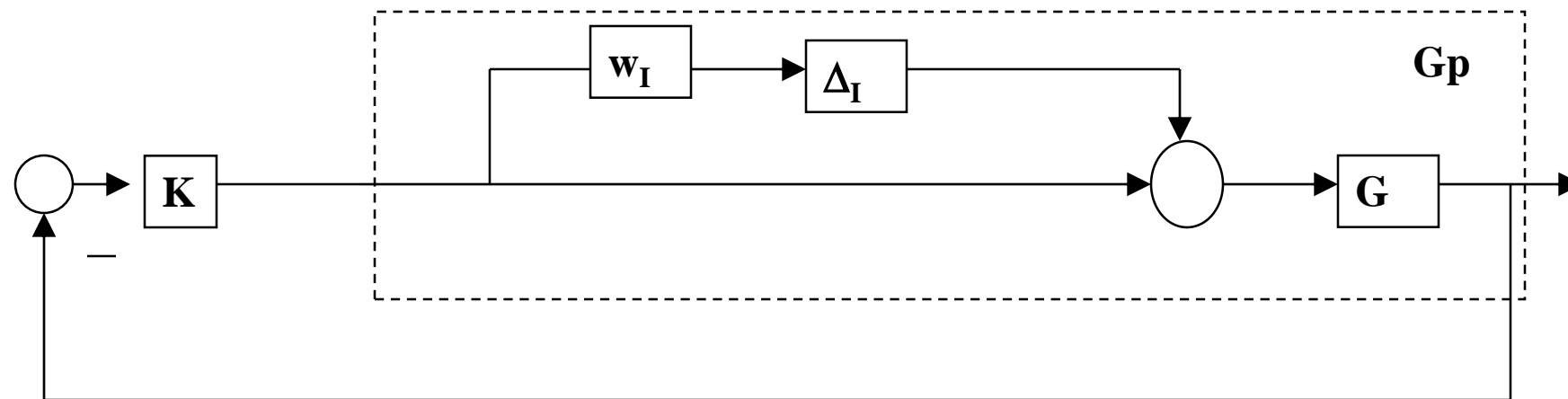
□ **Si l'on écrit** $k_p = \bar{k}(1 + w_I\Delta)$, $w_I = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}}$, $\bar{k} = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2}$

– On obtient dès lors

$$G_p(s) = \underbrace{\bar{k}G_o(s)}_{G(s)}(1 + w_I\Delta_I), \quad |\Delta_I| \leq 1$$

Stabilité robuste en présence d'incertitude multiple

- On considère la synthèse de control classique



- laquelle présente un transfert de boucle

$$L_p = G_p K = GK(1 + w_I \Delta_I) = L + w_I L \Delta_I, \quad \|\Delta_I\|_\infty \leq 1$$

- La stabilité au sens de Nyquist est vérifié si

- L_p n'entoure pas le point $-1 \quad \forall L_p$

Stabilité robuste en présence d'incertitude multiple

□ Nyquist : L_p n'entoure pas le point $-1 \quad \forall L_p$

$$L_p = G_p K = GK(1 + w_I \Delta_I) = L + w_I L \Delta_I, \quad \|\Delta_I\|_\infty \leq 1$$

– En d'autres termes, il faut

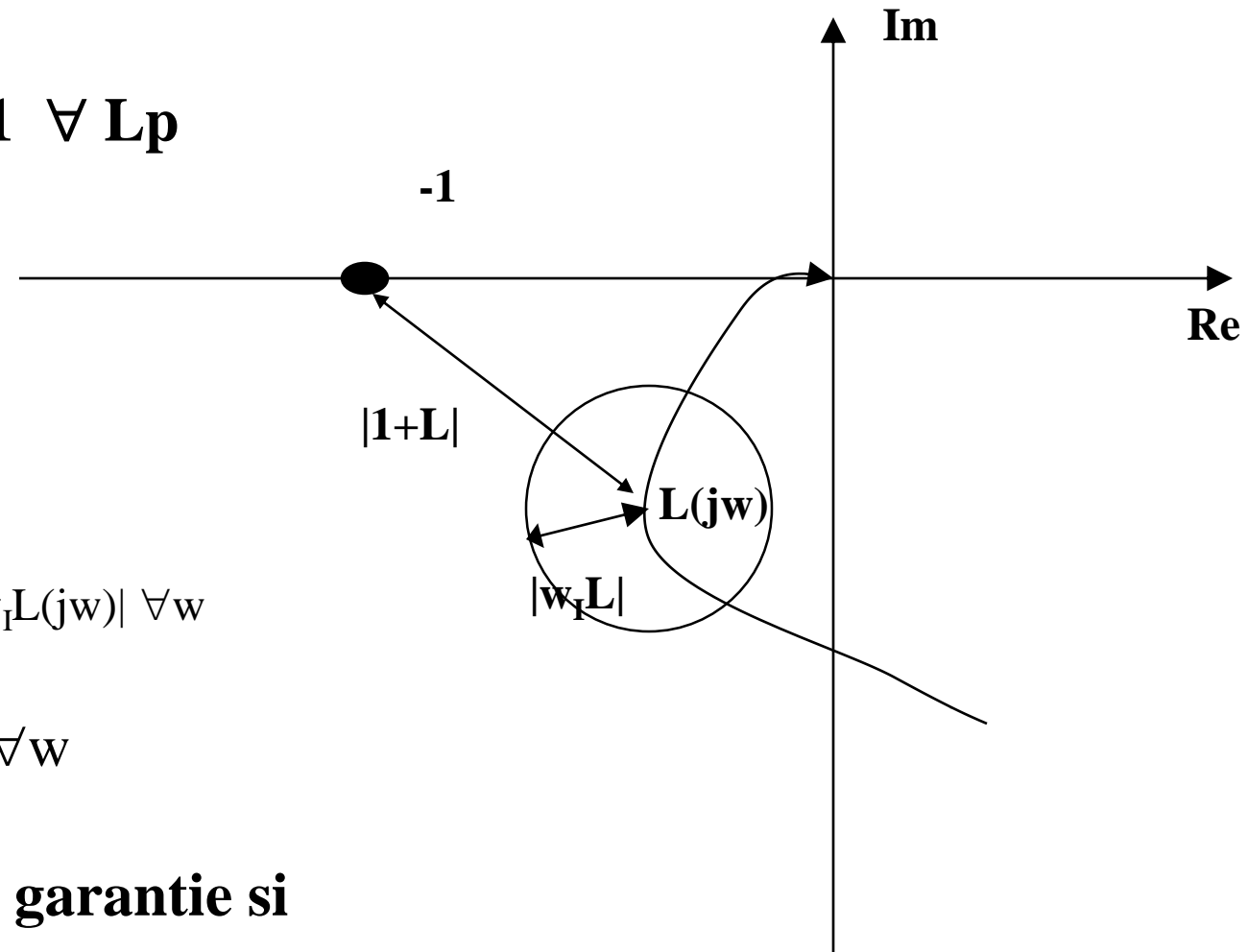
» Que la distance $|-1 - L(j\omega)| = |1 + L(j\omega)| > |w_I L(j\omega)| \quad \forall \omega$

– Soit $\left| \frac{w_I L}{1 + L} \right| < 1, \quad \forall \omega \iff |w_I T| < 1, \quad \forall \omega$

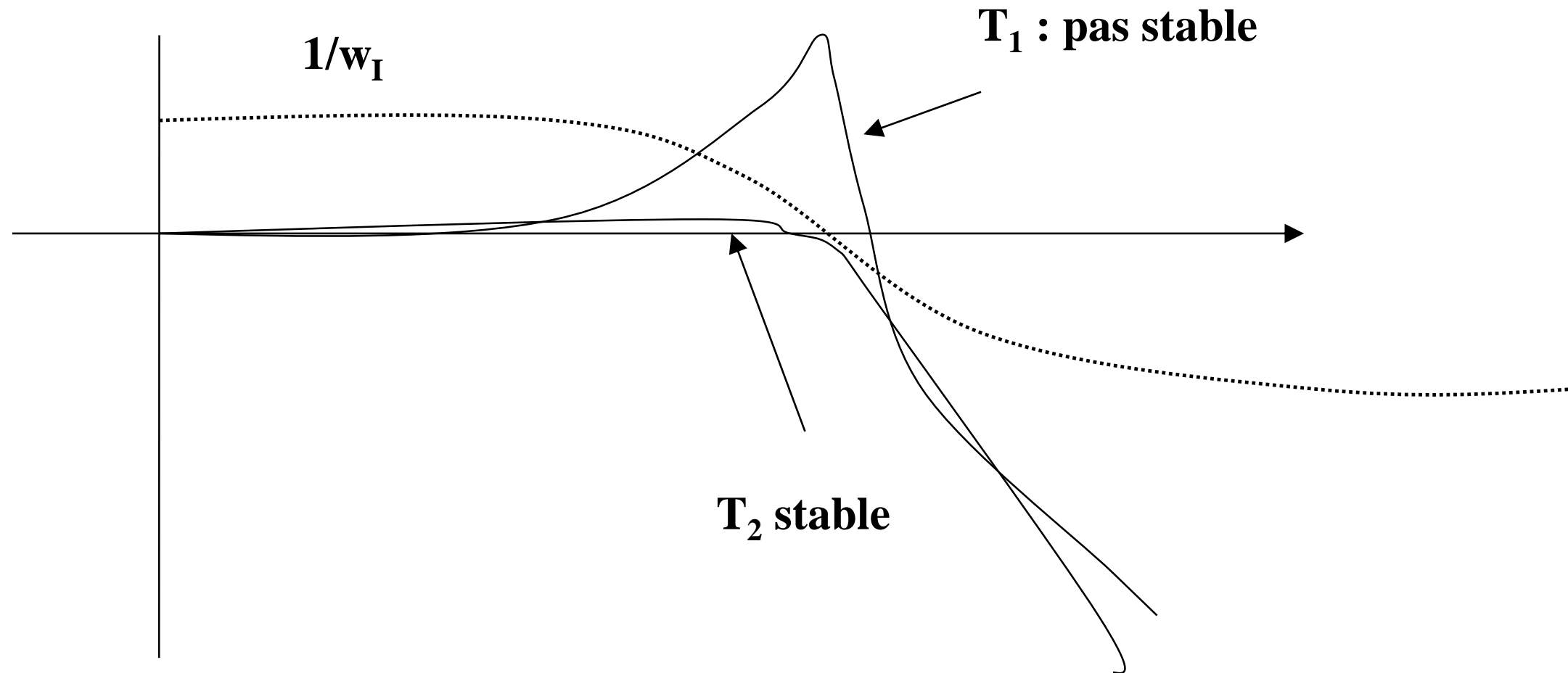
□ En conclusion, la stabilité robuste est garantie si

$$|T| < \frac{1}{|w_I|}, \quad \forall \omega$$

– Cela montre que T doit être faible dans la zone où l'incertitude relative w_I excède 1



Exemple



Exemple de mise sous forme LFT: application à la modélisation d'une dynamique hautes fréquences négligée

- Soit $G_p(s)$ une fonction transfert perturbée et $G_o(s)$ celle du système nominal, laquelle néglige une dynamique qu'on suppose être du premier ordre, avec une constante de temps $\tau < \tau_{\max}$:

$$G_p(s) = G_o(s) \frac{1}{1 + \tau s} \quad ; \quad \tau < \tau_{\max}$$

- La connaissance de la valeur τ_{\max} permet d'établir une borne sur l'erreur relative sur la réponse fréquentielle, à savoir

$$\forall \omega \quad \left| \frac{G_p(j\omega) - G_o(j\omega)}{G_o(j\omega)} \right| = \left| \frac{\tau j\omega}{1 + \tau j\omega} \right| \leq \left| \frac{\tau_{\max} j\omega}{1 + \tau_{\max} j\omega} \right|$$

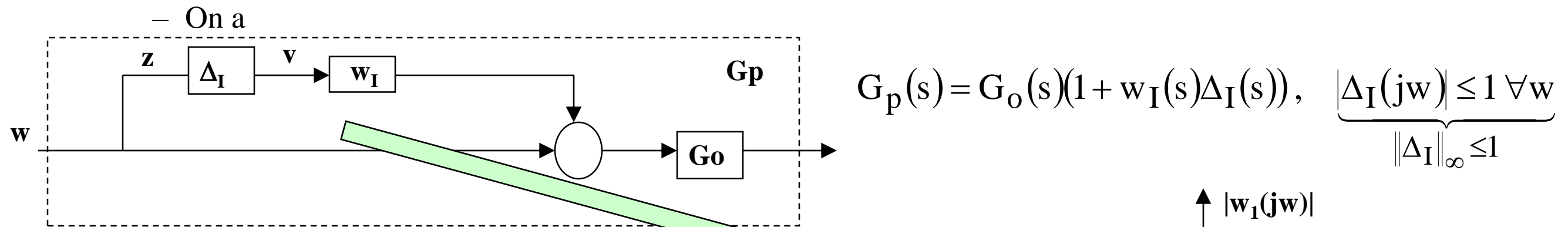
- On peut modéliser la dynamique négligée par une réécriture sous la forme d'un système à incertitude multiple

- où
$$\frac{G_p(s) - G_o(s)}{G_o(s)} = w_1(s) \Delta_1(s) \quad \text{soit} \quad G_p(s) = G_o(s) (1 + w_1(s) \Delta_1(s))$$

$$w_1(s) = \frac{\tau_{\max} s}{1 + \tau_{\max} s} \quad \text{et} \quad \forall \omega \quad |\Delta_1(j\omega)| < 1 \Leftrightarrow \|\Delta_1(s)\|_{\infty} < 1$$

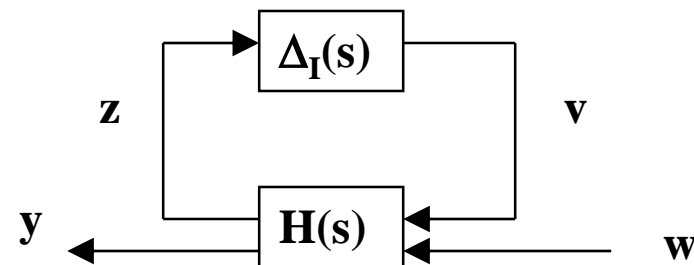
Modélisation d'une dynamique hautes fréquences négligée (suite)

- Avec représentation par LFT des incertitudes de modélisation

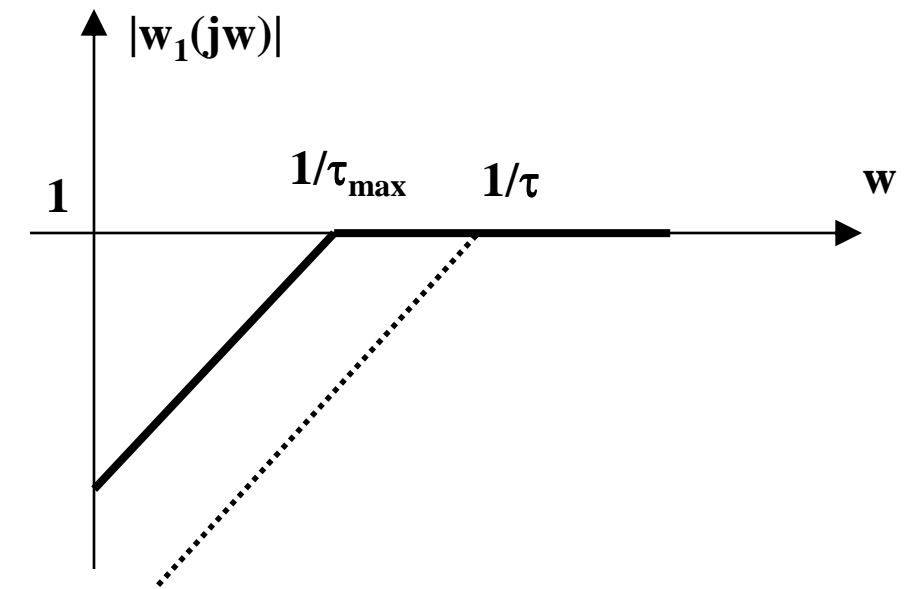


Système avec incertitude multiple

- On veut



Représentation par LFT



– Par identification, on obtient

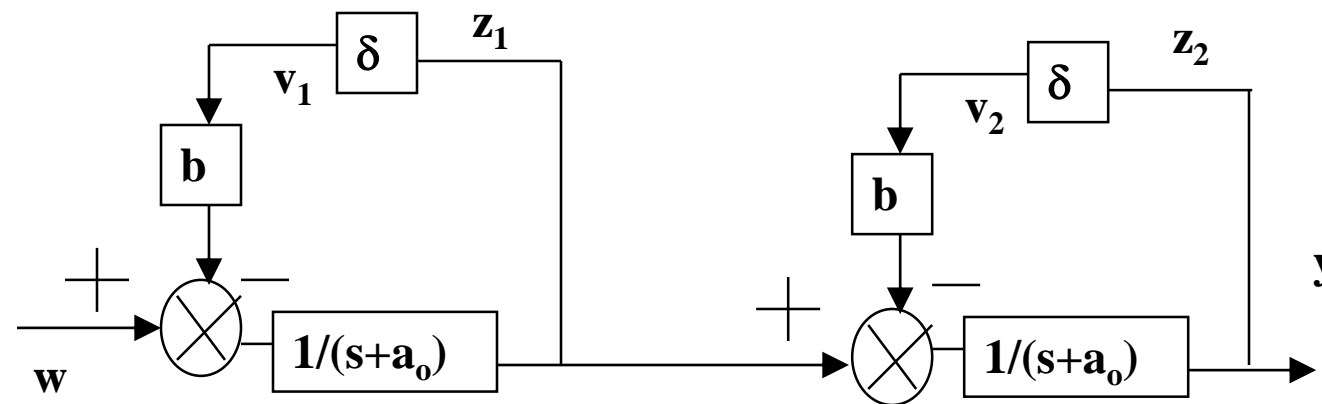
$$\begin{pmatrix} z(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = H(s) \begin{pmatrix} v(s) \\ w(s) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ G_o(s)w_1(s) & G_o(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$$

Autre exemple : incertitude paramétrique

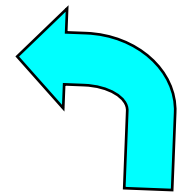
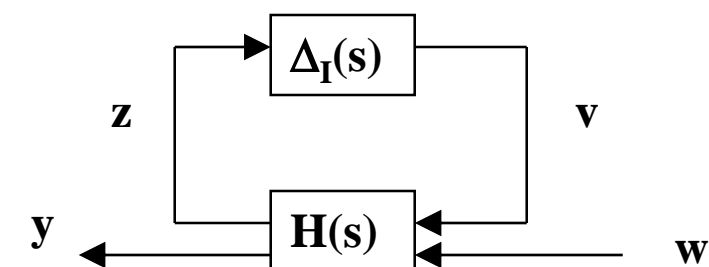
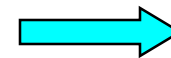
□ Supposons à présent que $G_p(s)$ s'écrive : $G_p(s) = \frac{1}{(s+a)^2}$ avec $a_0 - b < a < a_0 + b$

– En posant $a = a_0 + \delta b$, $-1 < \delta < +1$, et en remarquant que $\frac{1}{s+a} = \frac{1}{s+a_0} \left(1 + \delta \frac{b}{s+a_0}\right)^{-1}$

– On obtient le schéma-bloc suivant, lequel est associé à l'incertitude multiple inverse

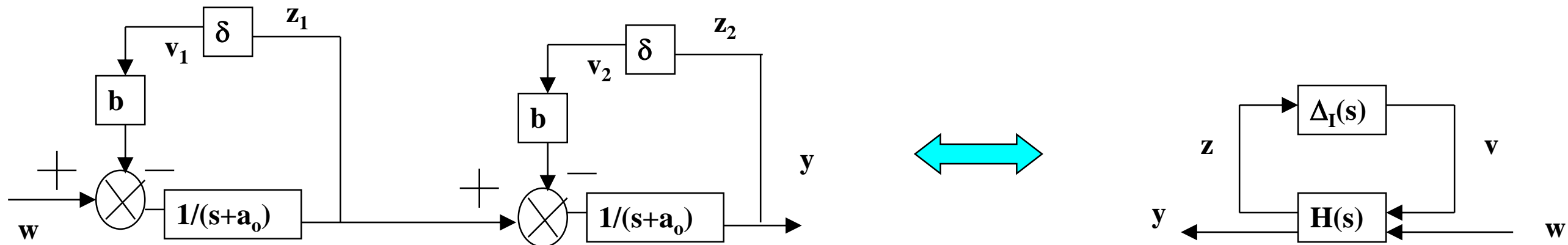


– qui s'identifie avec le schéma LFT usuel



De l'incertitude paramétrique à la LFT

□ Par identification, on obtient

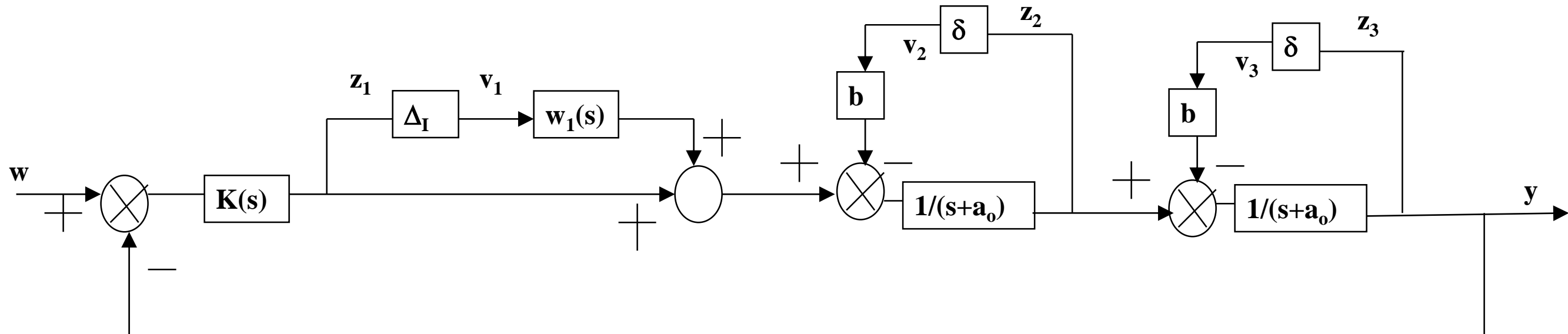


$$\begin{pmatrix} z_1(s) \\ z_2(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = H(s) \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ w(s) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{-b}{s+a_0} & 0 & \frac{1}{s+a_0} \\ \hline \frac{-b}{(s+a_0)^2} & \frac{-b}{s+a_0} & \frac{1}{(s+a_0)^2} \\ \frac{-b}{(s+a_0)^2} & \frac{-b}{s+a_0} & \frac{1}{(s+a_0)^2} \end{array} \right) \begin{pmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ w(s) \end{pmatrix}$$

$$\Delta(s) = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

Propriété des LFT

- Une propriété importante des LFT est que toute association de LFT est encore une LFT.
 - Ainsi si nous considérons une boucle d'asservissement, avec un correcteur $K(s)$ appliqué au modèle $G_p(s)$ qui présente une incertitude paramétrique et une dynamique négligée, nous obtenons à nouveau une LFT



Boucle d'asservissement avec 2 types d'incertitudes

- Où la structure générale de la matrice d'incertitude est $\Delta(s) = \text{diag}\{\Delta_1(s), \delta, \delta\}$
- Laquelle vérifie les conditions de normalisation $\|\Delta_1(s)\|_\infty < 1 \quad ; \quad \delta \in]-1, +1[\Leftrightarrow \|\Delta(s)\|_\infty < 1$

De l'étude de la robustesse au théorème du faible gain

- **L'étude de la robustesse consiste à chercher à garantir par exemple la stabilité pour un ensemble d'incertitudes $\Delta(s)$**
 - Si $H(s)$ et $\Delta(s)$ sont stables, la seule source d'instabilité provient du bouclage par $\Delta(s)$
 - il est donc équivalent d'étudier la stabilité du système de la figure suivante avec $M(s)=H_{zv}(s)$

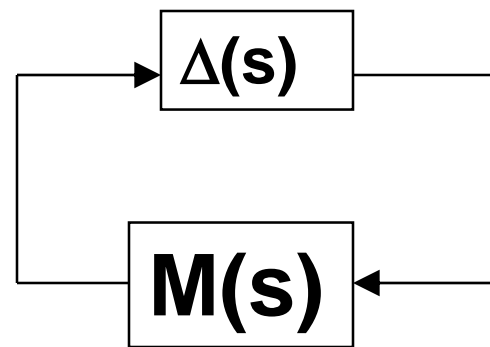


Schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

- **Robustesse de la stabilité : analyse non structurée**
 - Théorème du petit gain: Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ sont stables, le système de la figure ci-dessus est stable pour tous $\Delta(s)$ tel que $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq \alpha$ si et seulement si $\|M(s)\|_{\infty} \leq \alpha^{-1}$, où $M(s)=H_{zv}(s)$

Preuve du théorème du faible gain

□ Si $\|\mathbf{M}(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$ alors $\|\Delta(s)\mathbf{M}(s)\|_\infty \leq \|\Delta(s)\|_\infty \|\mathbf{M}(s)\|_\infty \leq \alpha \|\mathbf{M}(s)\|_\infty \leq \alpha \alpha^{-1} = 1$ on a donc

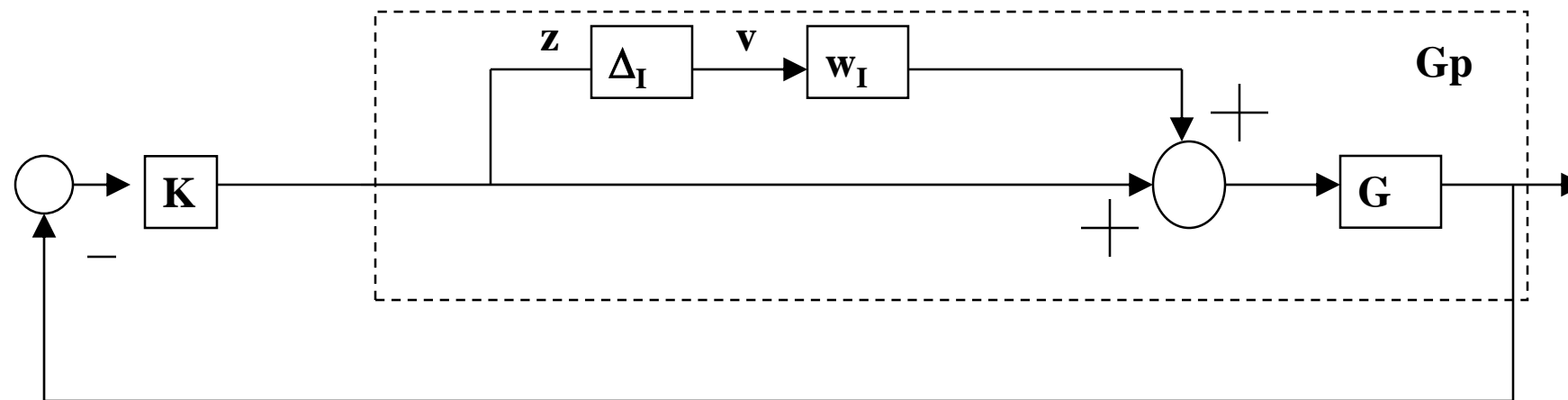
$$\begin{aligned} \forall \omega \quad \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)\mathbf{M}(j\omega)) &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \forall \omega \quad 1 - \left(\mathbf{M}^T(-j\omega)\Delta^T(-j\omega)\Delta(j\omega)\mathbf{M}(j\omega) \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

□ Le pire des cas est donné pour une incertitude $|\Delta(s)| = \alpha$ soit

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \forall \omega \quad (1 - \alpha M(j\omega))(1 + \alpha M(j\omega)) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \forall \omega \quad (1 - \alpha M(j\omega)) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \forall \omega \quad \alpha^{-1} &\geq M(j\omega) \end{aligned}$$

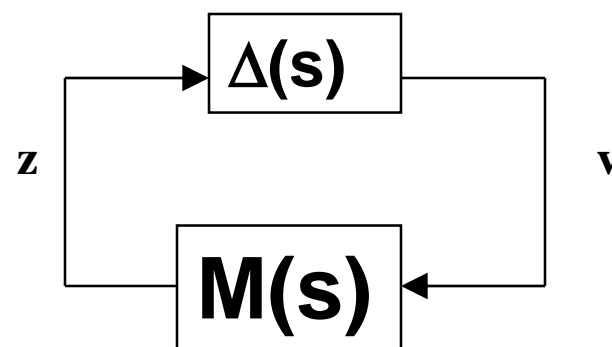
Conclusion

- Si on considère à nouveau le système $G_p(s)$ avec une dynamique négligée



- La structure de contrôle peut être réduite au schéma d'analyse de la robustesse de la stabilité

- Où



$$\frac{z}{v} = M(s) = \frac{-w_I(s)K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)}$$

Conclusion (suite)

□ Dans notre cas $\|\Delta(s)\|_\infty \leq \alpha < 1$, on en déduit par le théorème du faible gain

– Rappel : (Théorème du faible gain) Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ sont stables, la BF est stable pour tous $\Delta(s)$ tel que $\|\Delta(s)\|_\infty \leq \alpha$ si et seulement si $\|M(s)\|_\infty \leq \alpha^{-1}$, où $M(s)=H_{zv}(s)$

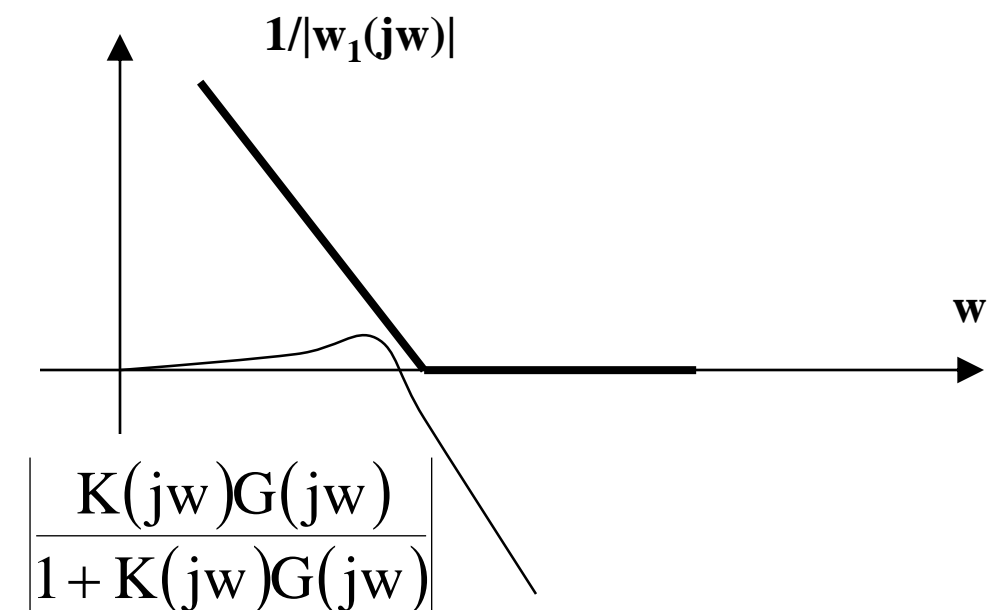
– Soit $\|M(s)\|_\infty < 1$ ou encore

$$\left\| \frac{-w_I(s)K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} \right\|_\infty < 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{K(j\omega)G(j\omega)}{1+K(j\omega)G(j\omega)} \right| < \frac{1}{|w_I(j\omega)|}$$

– avec

$$w_1(s) = \frac{\tau_{\max} s}{1 + \tau_{\max} s} \quad \text{et} \quad \forall \omega \quad |\Delta_1(j\omega)| < 1 \Leftrightarrow \|\Delta_1(s)\|_\infty < 1$$





Partie 3: Synthèse de lois de commande (LQG, H_∞ , optimisation LMI)

- Synthèse de lois de commande
 - » LQG
 - » H_∞ loop-shapping (modelage du transfert de boucle)
 - » H_∞ par pondération fréquentielle

Introduction à la commande par résolution LMI

□ Préambule

- Étude de la stabilité d'un système autonome au sens du théorème de Lyapunov

□ Théorème de Lyapunov (1890!)

- Une CNS de stabilité est qu'il \exists une fonction quadratique définie-positive $V(\xi) = \xi^T S \xi$, avec $S=S^T > 0$, telle que V décroît le long de toute trajectoire non nulle du système, i.e., $dV/dt < 0$.
- Une telle fonction si elle \exists , joue le rôle d'une « énergie totale » pour le système, et est appelée fonction de Lyapunov
- S'il \exists une fonction de Lyapunov quadratique prouvant la stabilité asymptotique, on dira que le système est quadratiquement stable

□ Rappel: Stabilité asymptotique

- » une des premières spécifications que l'on cherche à analyser, ou à imposer à un système est sa capacité de retour à l'équilibre (exemple: pendule, ...)
- Définition
 - » On dira qu'un système est asymptotiquement stable si pour toute CI $x(0)$, on a $x(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$



Aleksandr Mikhailovich Lyapunov
(1857-1918)



Analyse par fonction de Lyapunov

□ **Objectif:**

– Prouver la stabilité du système $\dot{x}=Ax$ au sens de Lyapunov

□ **Rappel: Critère de stabilité**

Le système $\dot{x}=Ax$ est stable si la partie réelle des vp de A sont < 0

□ **Autre critère : Prouver la stabilité au sens de Lyapunov, i.e. rechercher une fonctionnelle $V(x) = x^T S x$, avec $S=S^T > 0$ telle que $\dot{V} < 0$**

□ **Or**
$$\frac{dV(x(t))}{dt} = x^T(t) (A^T S + S A) x(t) < 0$$

□ **Le système est donc asymptotiquement stable ssi il $\exists S=S^T > 0$ telle que la LMI suivante en S est vérifiée**

$$A^T S + S A < 0$$



Exemple (système stable)

- On propose $A = -1$
- Le système scalaire $\dot{x} = -x$ est bien évidemment stable, car la vp est < 0
 - Au sens de Lyapunov, cela revient à déterminer $S=S^T>0$, telle que,

$$A^T S + SA < 0$$

- Exemple $S=2$ est une solution au problème posé

$$A^T S + SA < 0$$

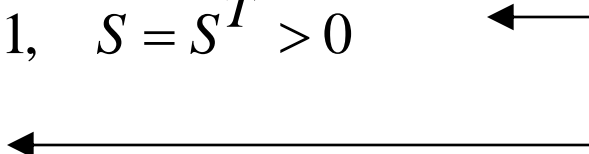
$$\Leftrightarrow -1 * -2 + -1 * -2 < 0$$

$$\Leftrightarrow -4 < 0$$

- Avec $S=S^T > 0$

Exemple (système instable)

- On propose $A = 1$
- Le système scalaire $\dot{x} = x$ est bien évidemment instable, car la vp est > 0
- Au sens de Lyapunov, il n'existe pas de matrice $S=S^T > 0$, telle que $A^T S + SA < 0$
- Preuve par contradiction

$$\begin{aligned} A^T S + SA < 0 \quad , A = 1, \quad S = S^T > 0 \\ \Leftrightarrow 2S < 0 \quad , S < 0 \end{aligned}$$


Cas général: LMI c'est quoi !!!

- Une Inégalité Matricielle Linéaire est une contrainte sur un vecteur réel $x \in \mathcal{R}^m$ de la forme

$$F(x) \equiv F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0$$

- où les matrices symétriques $F_i = F_i^T \in \mathcal{R}^{n \times n}$ sont données et le symbole $F \geq 0$ signifie que F est semidéfinie-positive, i.e. que $u^T F u \geq 0$ pour tout u

- Exemple

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix}$$

- D'après l'étude précédente le système $\dot{x} = Ax$ est stable au sens de Lyapunov s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que $A^T P + P A < 0$

Soit $\begin{bmatrix} -2p_1 & 2p_1 - 3p_2 \\ 2p_1 - 3p_2 & 4p_2 - 4p_3 \end{bmatrix} < 0$ et $\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} > 0$

→ $F(x) \equiv F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} p_1 + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} p_2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} p_3 > 0$

Quelques exemples de base

□ Convertir la contrainte quadratique convexe

$$(x - x_0)^T R^{-1} (x - x_0) \leq 1$$

– où $R=R^T > 0$ et x_0 sont données, en la contrainte LMI

$$\begin{bmatrix} 1 & (x - x_0)^T \\ (x - x_0) & R \end{bmatrix} \geq 0$$

□ On rencontre plus souvent des LMIs qui portent sur des variables matricielles, par exemple l'inégalité de Riccati

$$A^T P + PA + PBR^{-1}B^T P + Q < 0$$

» où $A, B, Q = Q^T, R = R^T > 0$ sont des matrices données de tailles appropriées et $P=P^T$ est la variable

– est une LMI en P

$$\begin{bmatrix} -A^T P - PA - Q & PB \\ B^T P & R \end{bmatrix} > 0$$

□ Ou encore, le système $\dot{x} = Ax$ est stable si et seulement si, il existe une matrice $S=S^T > 0$, telle que $A^T S + SA < 0$, il s'agit d'une LMI en S

□ Lemme de Schur :

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0$$

avec $A = A^T > 0, C = C^T > 0$

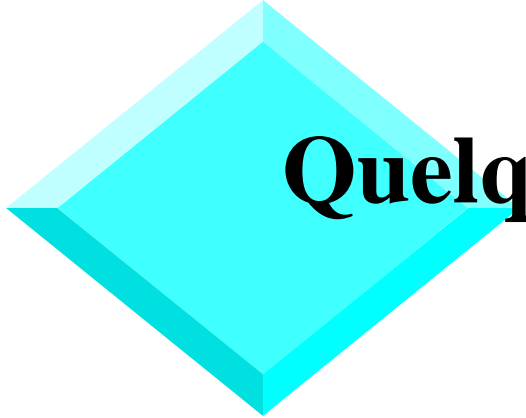
$$\Leftrightarrow 1) C - B^T A^{-1} B > 0,$$

$$\Leftrightarrow 2) A - B C^{-1} B^T > 0,$$

Avec $A = A^T > 0, C = C^T > 0$

Preuve 1): Multiplier à gauche et à droite resp. par

$$\begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$



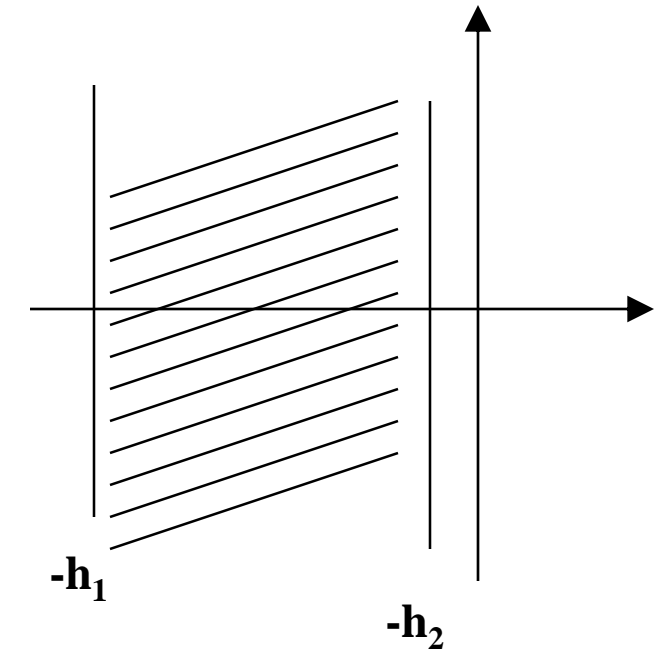
Quelques exemples de base

□ Les valeurs propres de A sont – elles comprises entre $-h_1$ et $-h_2$?

– Oui si et seulement si il existe une solution

$X=X^T>0$ qui vérifie les 2 LMI's

$$\begin{aligned} AX + XA^T + 2h_2X &< 0 \\ AX + XA^T + 2h_1X &> 0 \end{aligned} \quad (1)$$



□ Explication

$$\begin{aligned} (1) \iff -10X < AX + XA^T < -4X < 0 &\iff \begin{aligned} (A+2I)X + X(A+2I)^T &< 0 \\ 0 < (A+5I)X + X(A+5I)^T \end{aligned} &\iff \begin{aligned} (A+2I): \text{stable} &\iff \Re(\lambda(A+2I)) < 0 \\ (-A-5I): \text{stable} &\iff \Re(\lambda(-A-5I)) < 0 \end{aligned} \\ &\iff \begin{aligned} \Re(\lambda(A)) < -2 \\ \Re(\lambda(A)) > -5I \end{aligned} \\ &X = X^T > 0 \end{aligned}$$



Commande par retour d'état (outils LMI)

- On considère le système LTI

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

» avec $u = Kx$

- Objectif: rechercher K par une synthèse LMI, tel que la BF soit stable

$$\dot{x} = (A + BK)x$$

- Solution

– Déterminer un X et U solution de la LMI

$$AX + B_u U + (AX + B_u U)^T < 0, \quad X > 0$$

– Le correcteur K est donné par la relation $K=UX^{-1}$

Exemple de programmation sous matlab

```
□ A=[1 0; 2 -2]; B=[1; 0];
% le correcteur K (u=Kx) est donné par résolution
% AX+BU+(AX+BU)'<0 et X > 0
% K=U*inv(X)
□ setlmis([]); % ouverture de la procédure de construction de la LMI
X=lmivar(1,[2,1]); % déclaration de X en précisant sa taille 2*2
U=lmivar(2,[1,2]); % déclaration de U en précisant sa taille 1*2
% Déclaration
% S = lmivar(type,struct)
% type = 1 si S est symétrique
% type = 1 et struct = [i,1] -> block size i*i
% type = 2 et struct = [M,N] -> S est rectangle de dimension MxN
lmiterm([1, 1, 1, X], A, eye(2), 's'); % LMI #1: A*X+X'*A'
lmiterm([1, 1, 1, U], B, eye(2), 's'); % LMI #1: B*U+U'*B'
lmiterm([-2, 1, 1, X], 1, 1); % LMI #2: 0 < X
%TERMID(1) = -2 -> right-hand side of the 2-th LMI
lmicont=getlmis; % diag et fermeture de la proc. de construction de la LMI
[ob,val]=feasp(lmicont,[0 1000 1e6 10 0], -0.01); % résolution de la LMI construite
□ X=dec2mat(lmicont,val,X); %recupere et assigne a X la solution obtenue)
U=dec2mat(lmicont,val,U); %recupere et assigne a U la solution obtenue)
K=U*inv(X);
```

Explication : Stabilisation par retour d'état

Sys BF $\dot{x} = (A + BK)x$

Lya $V(x) = x^T X^{-1} x$

$$\dot{V}(x) = x^T \left((A + BK)^T X^{-1} + X^{-1} (A + BK) \right) x < 0$$

$$= x^T \left(X(A + BK)^T + (A + BK)X \right) x < 0$$

$$= x^T \left(AX + BU + (AX + BU)^T \right) x < 0$$

- Le système bouclé est stable ssi la condition suivante est vérifiée

$$(A + B_u K)X + X(A + B_u K)^T < 0 \quad (i)$$

- pour une certaine matrice symétrique $X > 0$ (correspondant à la fonction de Lyapunov $V(\xi) = \xi^T X^{-1} \xi$)

- La condition (i) n'est pas une LMI à la fois en X et K , à cause du terme quadratique KX .

- On pose $U = KX$, on obtient dès lors une LMI en X et U :

$$AX + B_u U + (AX + B_u U)^T < 0, \quad X > 0$$



Stabilisation par retour d'état avec placement des pôles entre $-h_2$ et $-h_1$

□ Solution

$$AX + B_u U + (AX + B_u U)^T + 2h_2 X < 0,$$

$$AX + B_u U + (AX + B_u U)^T + 2h_1 X > 0,$$

$$X = X^T > 0$$

Propriétés Entrée-Sortie

- Étude de l'effet d'une entrée sur la sortie du système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w \\ z = C_z x \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{i})$$

- On définit le Gain L_2 du système par la quantité

$$\sup_{\|w\|_2 \neq 0} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \leq \lambda^2 \iff \int_0^\infty z^T z dt \leq \lambda^2 \int_0^\infty w^T w dt$$

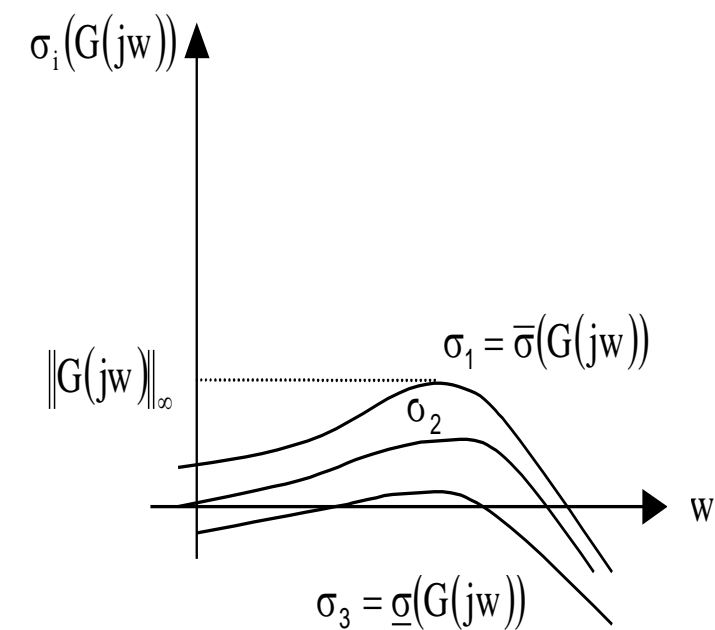
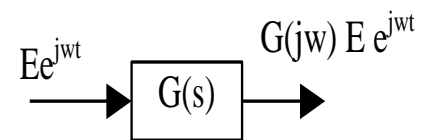
– où la norme L_2 d'un signal w est définie par $\|w\|_2^2 = \int_0^\infty w^T w dt$

- Le gain L_2 sert à mesurer la quantité d'énergie transmise par le système. La notion de gain L_2 est utile pour quantifier la façon dont le système rejette les perturbations externes (collectées dans le signal w)

Rappel

- Dans la cas des systèmes LTI, la borne ainsi obtenue est égale à la norme H_∞ de la fonction de transfert du système, i.e

$$\max_{\Re s \geq 0} \left\| C_z (sI - A)^{-1} B_w \right\|_\infty$$



Exemple 1: Système monovariante

- On considère le système

$$G_1(s) = \frac{1}{s+2}$$

- Par définition :

$$\sigma_i(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_i(G(j\omega)G(-j\omega)^T)} = \sqrt{\lambda_i(G(-j\omega)^T G(j\omega))}$$

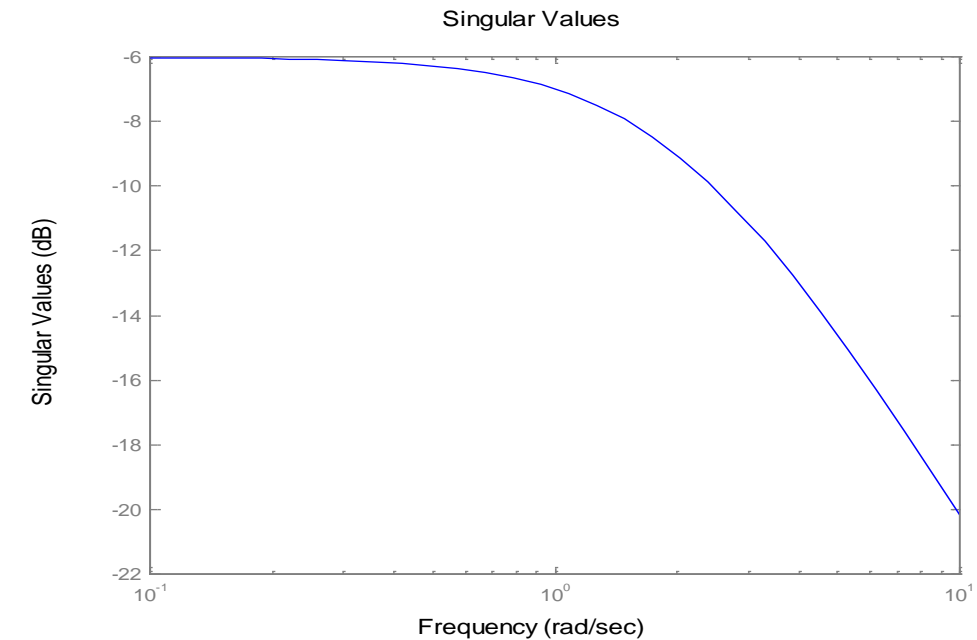
$i = 1, \min(m, p)$

– soit

- Remarque :
$$\sigma_1(G(j\omega)) = \sqrt{\lambda_1\left(\frac{1}{2+j\omega} \frac{1}{2-j\omega}\right)} = \sqrt{\left(\frac{1}{4+\omega^2}\right)}$$

– Comme G_1 est un système monovariante, on retrouve la définition du module, à savoir

$$\sigma_1(G(j\omega)) = |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$$



Propriétés Entrée-Sortie : Gain L_2

Systeme :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_w w \\ z = C_z x \\ x(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{i})$$

□ Solution

- On suppose qu'il existe une fonction quadratique $V(\xi) = \xi^T S \xi$, $S > 0$ et un scalaire $\lambda > 0$ tels que, pour tout t ,

$$\frac{dV(x(t))}{dt} + z^T z - \lambda^2 w^T w \leq 0 \quad \text{pour tout } x, w \text{ vérifiant (i)} \quad (*)$$

- En intégrant l'inégalité de 0 à T , avec $x(0)=0$, on obtient $V(x(t)) + \int_0^T (z^T z - \lambda^2 w^T w) dt \leq 0$

- Puisque $V(x(t)) > 0$ alors $0 < V(x(t)) \leq \int_0^T (-z^T z + \lambda^2 w^T w) dt$

$$\Rightarrow \int_0^T (z^T z) dt < \lambda^2 \int_0^T (w^T w) dt \Leftrightarrow \frac{\|z\|_2}{\|w\|_2} \leq \lambda$$

- où l'inégalité (*) s'écrit

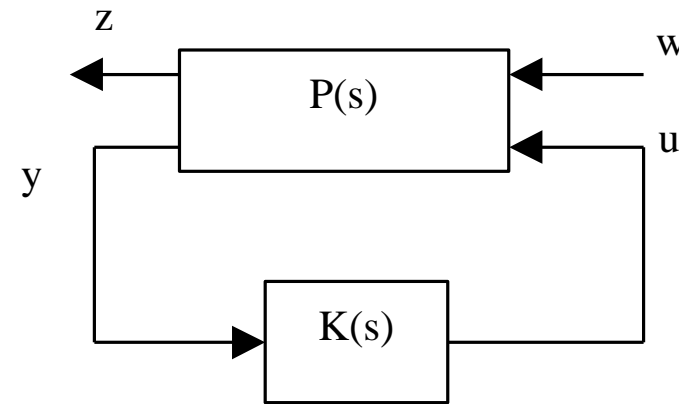
$$\begin{bmatrix} A^T S + SA + C_z^T C_z & SB_w \\ B_w^T S & -\lambda^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{ii})$$

- » Il reste à rechercher de manière itérative la plus petite borne supérieure λ qui admette une solution $S > 0$ de la LMI (ii)

Synthèse H_∞ : approche standard par LMI

□ Problème standard

– La synthèse H_∞ illustrée sur la figure suivante est représentée par un procédé $P(s)$ et son contrôleur $K(s)$ associé



– où

$$P(s) := \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \bar{z} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B}_w & \bar{B}_u \\ \bar{C}_z & \bar{D}_{zw} & \bar{D}_{zu} \\ \bar{C}_y & \bar{D}_{yw} & \bar{D}_{yu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{w} \\ \bar{u} \end{pmatrix} \quad K(s) := \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

□ **Problème H_∞ standard** : $P(s)$ et γ étant donnés, déterminer $K(s)$ qui stabilise le système bouclé de la figure ci-dessus et assure une norme H_∞ du transfert entre w et z inférieure à γ

Hypothèses du pb H_∞ standard par LMI

- La synthèse par LMI fournit une autre façon de résoudre le pb standard développé également par la résolution de 2 équations de Riccati (voir poly cours AC511). Elle est plus générale, dans la mesure où elle ne nécessite pas, contrairement à l'approche par équations de Riccati le respect des hypothèses H_2 , H_3 et H_4 (l'hypothèse H_1 reste nécessaire) :

– H_1 : (A, B_u) stabilisable et (C_y, A) détectable

→ Hypothèse classique existe en commande modale ou en encore en synthèse LQG, elle est nécessaire pour obtenir la stabilité du système bouclé

– H_2 : $\text{rang}(D_{zu}) = \dim(u)$ et $\text{rang}(D_{yw}) = \dim(y)$

→ Hypothèse nécessaire pour avoir un correcteur strictement propre

– H_3 : $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_u \\ C_z & D_{zu} \end{bmatrix}$ est de plein rang colonne pour tout w

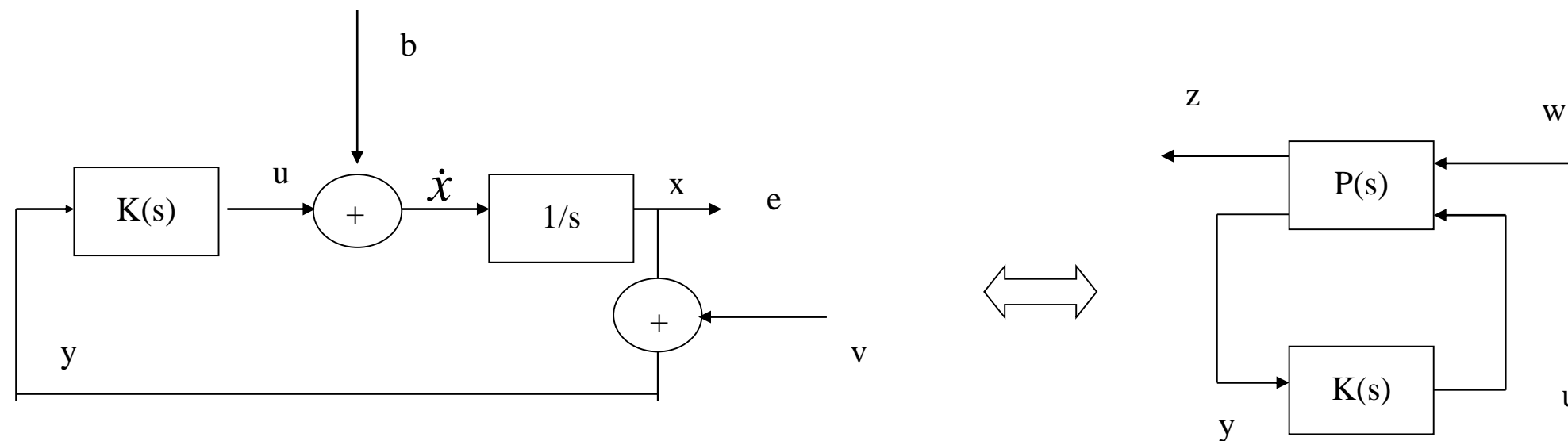
– H_4 : $\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_w \\ C_y & D_{yw} \end{bmatrix}$ est de plein rang colonne pour tout w

– Démonstration des hyp. H_3 et H_4 (voir poly cours AC511)

Exemple élémentaire

□ Les deux schémas suivant sont équivalents

- $w=(b \ v)^T$ est le vecteur des entrées
- $z=(e \ u)^T$ est le vecteur de signaux à contrôler



□ La représentation de la matrice $P(s)$ s'écrit alors sous la forme standard suivante :

$$P(s) := \begin{cases} \dot{x} = (0)x + (1 \ 0)w + (1)u \\ z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1)x + (0 \ 1)w + (0)u \end{cases}$$

Algorithme

$$P(s) := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix} \quad K(s) := \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ y \end{pmatrix}$$

□ **Hypothèses** : $D_{yu} = 0$ et (A, B_u) stabilisable et (C_y, A) détectable

□ **Problème** : déterminer le contrôleur dynamique K telle que le système augmenté

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{x}} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + B_u \bar{D} C_y & B_u \bar{C} & B_w + B_u \bar{D} D_{yw} \\ \bar{B} C_y & \bar{A} & \bar{B} D_{yw} \\ C_z + D_{zu} \bar{D} C_y & D_{zu} \bar{C} & D_{zw} + D_{zu} \bar{D} D_{yw} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \bar{x} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ w \end{pmatrix} \quad (\mathbf{a})$$

soit stable et admette un transfert de norme $H_\infty < \gamma$ entre w et z .

□ **Solution** : Soit $V(\tilde{x}) = \tilde{x}^T \tilde{X} \tilde{x} > 0$ une fonction de Lyapunov candidate telle que

$$\frac{dV(\tilde{x})}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0 \quad \text{pour tout } \tilde{x}, w \text{ vérifiant (a)} \quad (\mathbf{b})$$

□ **Algorithme**

- Étape 1: l'inégalité (b) est solution du pb, la dérivation de la fonction de Lyapunov candidate le long des trajectoires du système augmenté transforme l'inégalité en une BMI en \tilde{X}, K
- Étape 2: par le lemme d'élimination on transforme la BMI en 2 LMI où K n'intervient plus \tilde{X}, K
- Étape 3: La solution des 2 LMI garantit que le correcteur K existe. \tilde{X} est alors connue et la BMI en devient alors une LMI en K , dont la solution fournit le correcteur K .

□ **Bonne nouvelle** : Matlab fait les 3 étapes

Résolution

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{B}w \\ z &= \tilde{C}\tilde{x} + \tilde{D}w\end{aligned}\quad (\text{a})$$

$$\frac{dV(\tilde{x})}{dt} + z^T z - \gamma^2 w^T w \leq 0 \quad (\text{b})$$

- **Étape 1:** L'inégalité (b) est solution du pb, la dérivée de V le long des trajectoires du système augmenté (a) transforme l'inégalité (b) en une BMI :

$$\begin{pmatrix} \gamma^2 I - \tilde{D}^T \tilde{D} & -(\tilde{C}^T \tilde{D} + \tilde{X} \tilde{B})^T \\ -(\tilde{C}^T \tilde{D} + \tilde{X} \tilde{B}) & -(\tilde{A}^T \tilde{X} + \tilde{X} \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C}) \end{pmatrix} > 0$$

– C'est une BMI car \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} , \tilde{D} sont fonctions de K

- **Étape 2:** On applique le lemme d'élimination pour éliminer K, Cela revient à écrire la BMI ci dessus sous la forme

$$\Psi + Q^T K^T P + P^T K Q < 0$$

– on obtient après quelques manipulations les 2 LMI suivantes

$$\begin{pmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T S + S A & S B_w & C_z^T \\ B_w^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{pmatrix} < 0$$

$$\begin{pmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A R + R A^T & R C_z^T & B_w \\ C_z R & -\gamma I_{n_z} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I_{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix} < 0$$

où

$$N_R = \text{Ker} \begin{pmatrix} B_u^T \\ D_{eu}^T \end{pmatrix} \quad N_S = \text{Ker} \begin{pmatrix} C_y \\ D_{yw} \end{pmatrix}$$

Lemme d'élimination : $W=W^T$

$$W + M K N^T + N K^T M^T < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} W + M U + U^T M^T < 0 \\ W + N V + V^T N^T < 0 \end{cases}$$

Correcteur d'ordre plein (pb convexe)

□ Étape 2 (Suite)

Il reste à rechercher la valeur optimale de γ en résolvant le problème d'optimisation convexe

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \gamma \quad \text{sous} \quad \begin{pmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} AR + RA^T & RC_z^T & B_w \\ C_z R & -\gamma I_{n_z} & D_{ew} \\ B_w^T & D_{zw}^T & -\gamma I_{n_w} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{n_w} \end{pmatrix} < 0 \quad \begin{pmatrix} R & I_n \\ I_n & S \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T S + SA & SB_w & C_z^T \\ B_w^T S & -\gamma I_{n_w} & D_{zw}^T \\ C_z & D_{zw} & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{n_z} \end{pmatrix} < 0$$

□ Étape 3: A partir des matrices R et S solutions du problème précédent, \tilde{X} est maintenant connue, la BMI

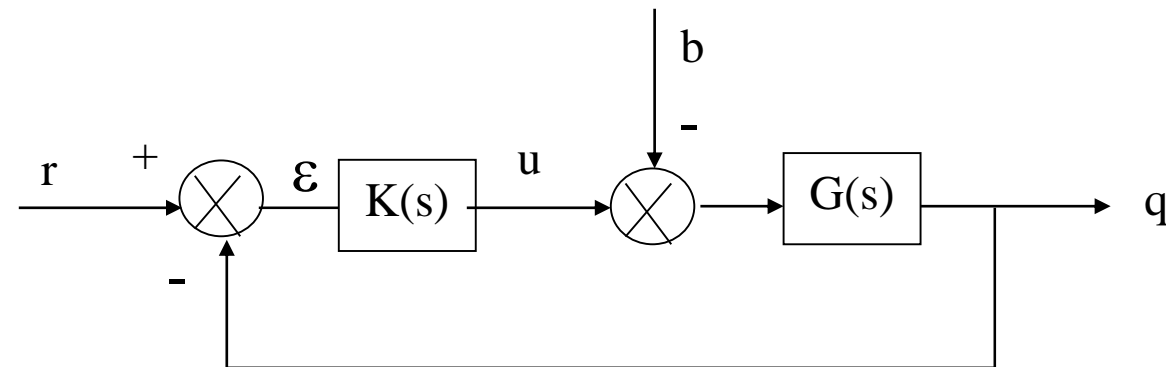
$$\begin{pmatrix} \gamma^2 I - \tilde{D}^T \tilde{D} & -(\tilde{C}^T \tilde{D} + \tilde{X} \tilde{B})^T \\ -(\tilde{C}^T \tilde{D} + \tilde{X} \tilde{B}) & -(\tilde{A}^T \tilde{X} + \tilde{X} \tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C}) \end{pmatrix} > 0$$

devient une LMI en K, dont la solution fournit le correcteur K

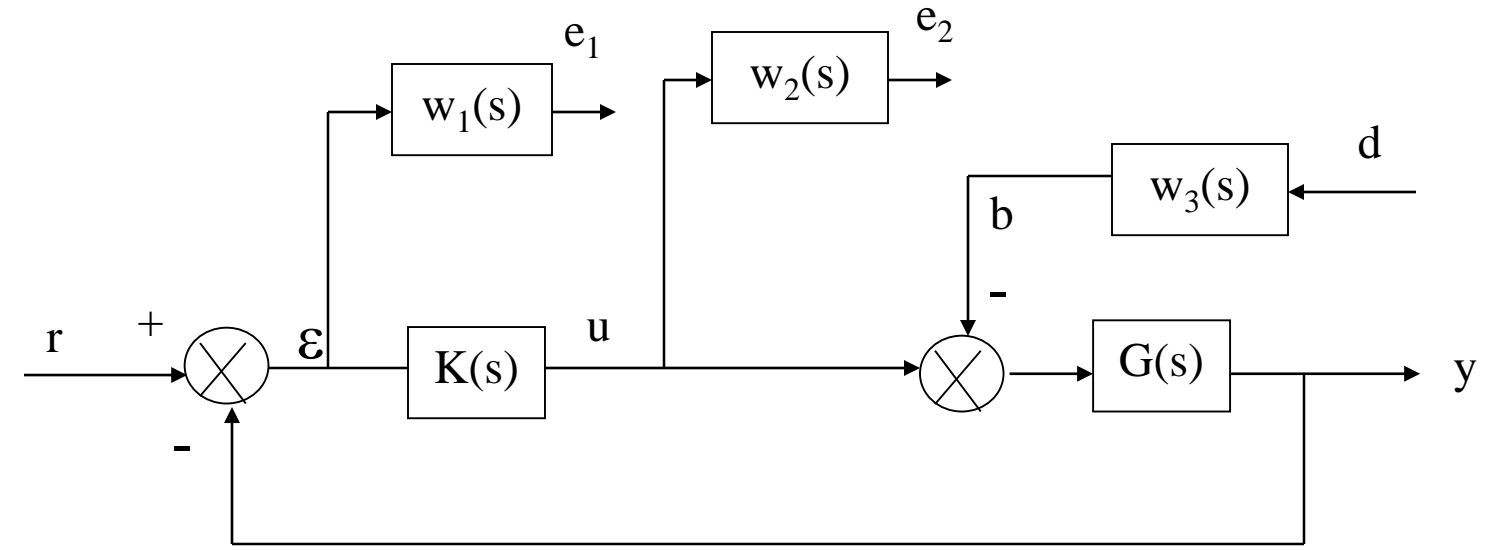
Problème H_∞ standard par résolution LMI

□ Mise en forme pour la synthèse

- Considérons l'exemple classique d'un système asservi où $G(s)$ est un modèle du système à asservir et $K(s)$ le correcteur à déterminer pour asservir la sortie q sur la référence r .
- Le signal b est une perturbation.



Obtention des objectifs de synthèse : deux approches



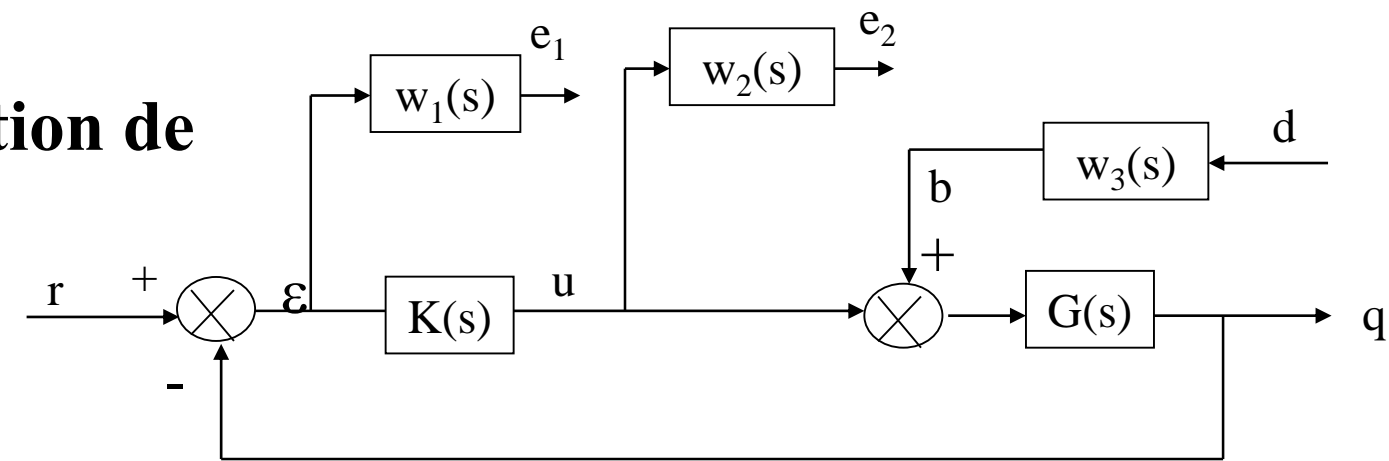
□ Par l'introduction de fonction de pondération

- Mise en œuvre par l'introduction de fonctions de pondération
- Pour atteindre les objectifs précédents, on peut introduire des pondérations sur les différents signaux, qui prendront la forme de filtres permettant, suivant le signal auquel elles s'appliquent, de privilégier un domaine de fréquences particulier.
- Considérons à cette fin le schéma suivant dans lequel ε est pondérée par le filtre $w_1(s)$, la commande u par $w_2(s)$ et l'entrée de perturbation b est la sortie d'un filtre $w_3(s)$

□ Par "loop shaping"

- Consiste à modéliser le transfert de boucle de telle sorte ce transfert présente un bon compromis P/R

Mises en œuvre par l'introduction de fonction de pondération



- En considérant r et d comme des entrées et e_1 , e_2 comme les signaux à surveiller, on obtient dès lors :

$$\begin{pmatrix} E_1(s) \\ E_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & w_2(s)K(s)S(s)G(s)w_3(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(s) \\ D(s) \end{pmatrix}$$

$$S(s) = (1 + GK)^{-1}$$

- Le problème H_∞ standard qui en découle est
 - déterminer un scalaire $\gamma > 0$ et le correcteur $K(s)$ stabilisant le système bouclé et assurant :

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & w_2(s)K(s)S(s)G(s)w_3(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (**)$$

Mises en œuvre par l'introduction de fonction de pondération (Suite)

$$\begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} \quad \|M\|_{\infty} = \left\| \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \right\| < \gamma \quad \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix} \quad \text{(i)}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & w_2(s)K(s)S(s)G(s)w_3(s) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} < \gamma \quad \text{(ii)}$$

□ **Avantage**

- Bien que le pb (i) est plus simple, l'avantage de considérer ce pb est que les filtres $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$ permettent de modeler les différents transferts S , KS , SG et KSG
- Les propriétés de la norme H_{∞} assurent en effet que si la condition (ii) est vérifiée, alors les 4 conditions suivantes le sont aussi :

$$\|w_1(s)S(s)\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad |S(jw)| < \frac{\gamma}{|w_1(jw)|} \quad \text{(1)}$$

$$\|w_2(s)K(s)S(s)\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad |K(jw)S(jw)| < \frac{\gamma}{|w_2(jw)|} \quad \text{(2)}$$

$$\|w_1(s)w_3(s)S(s)G(s)\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad |S(jw)G(jw)| < \frac{\gamma}{|w_1(jw)w_3(jw)|} \quad \text{(3)}$$

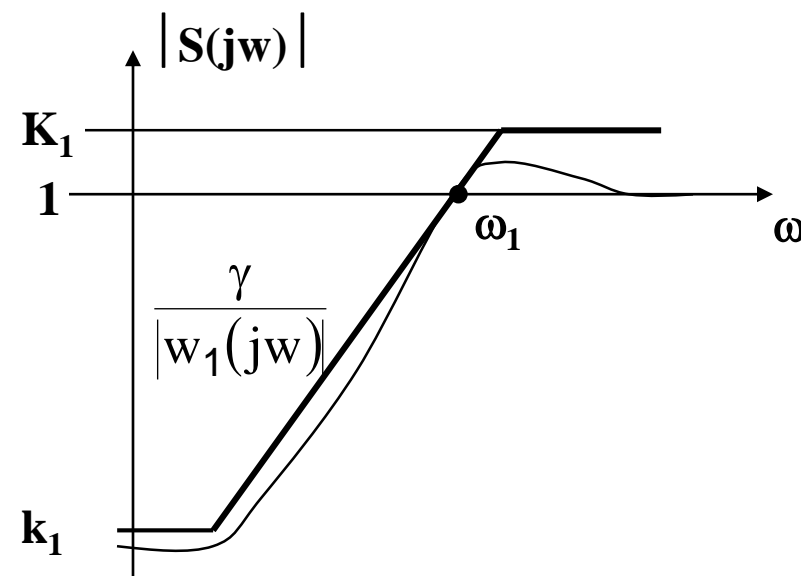
$$\|w_2(s)w_3(s)K(s)S(s)G(s)\|_{\infty} < \gamma \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad |K(jw)S(jw)G(jw)| < \frac{\gamma}{|w_2(jw)w_3(jw)|} \quad \text{(4)}$$

- On voit donc que la réponse fréquentielle de chacune des fonctions S , KS , SG et KSG est contrainte par un gabarit qui dépend des filtres choisis.

Allure typique des différents gabarits

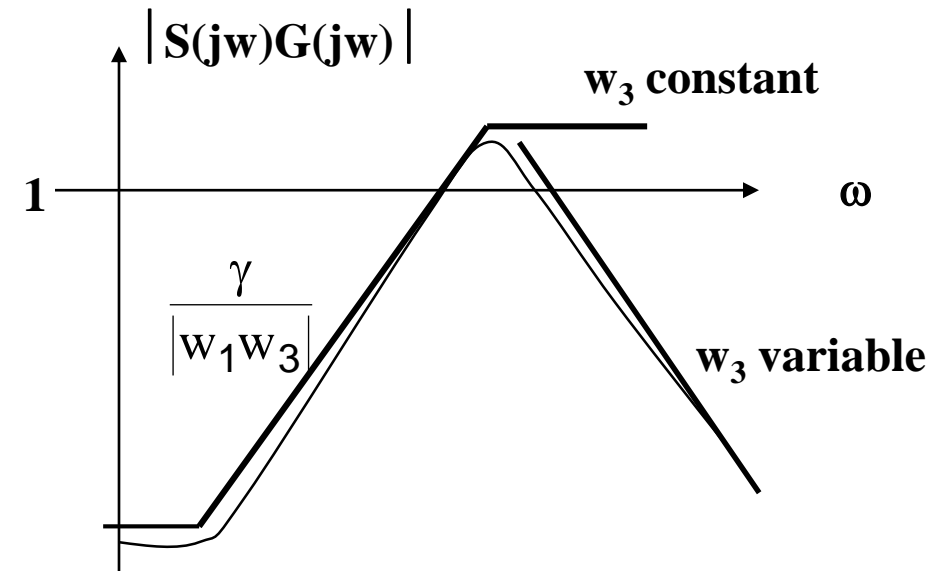
$$\begin{aligned}
 \text{MM} &= \min | -1 - H_{\text{BO}} | = \min | 1 + KG | \\
 &= \min | 1/S(j\omega) | = 1/\max(|S(j\omega)|) \\
 &= 1/\|S(j\omega)\|_{\infty} = \frac{1}{K_1}
 \end{aligned}$$

consigne → écart



- Le gabarit sur S est fixée à une valeur k_1 faible en basse fréquence pour assurer les objectifs de précision
- La pulsation ω_1 pour laquelle le gabarit coupe l'axe 0db peut être interprétée comme la BP minimale souhaitée pour l'asservissement.
- La valeur K_1 du gabarit en haute fréquence limite le maximum de la réponse fréquentielle de S (i.e. sa norme H_{∞}), ce qui impose une MM au moins égale à $1/K_1$.

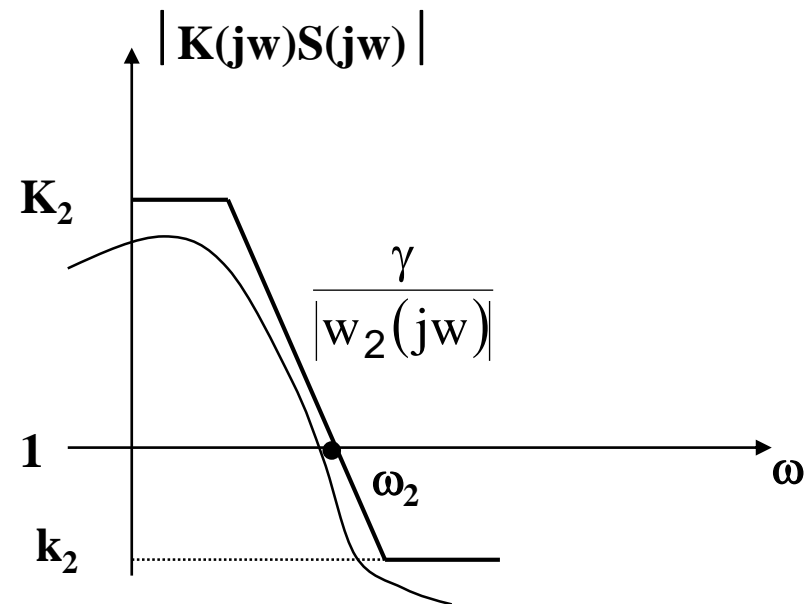
perturbation → écart



- Le gabarit sur SG dépend des 2 filtres $w_1(s)$ et $w_3(s)$.
- Dans certain cas il suffit de prendre $w_3(s)$ constant et faible (exemple = 10^{-2}), ce qui permet de régler l'atténuation en basse fréquence.
- Mais $w_3(s)$ permet également de modifier le comportement de SG en moyenne fréquence, pour obtenir un comportement transitoire correct en réponse à une perturbation.

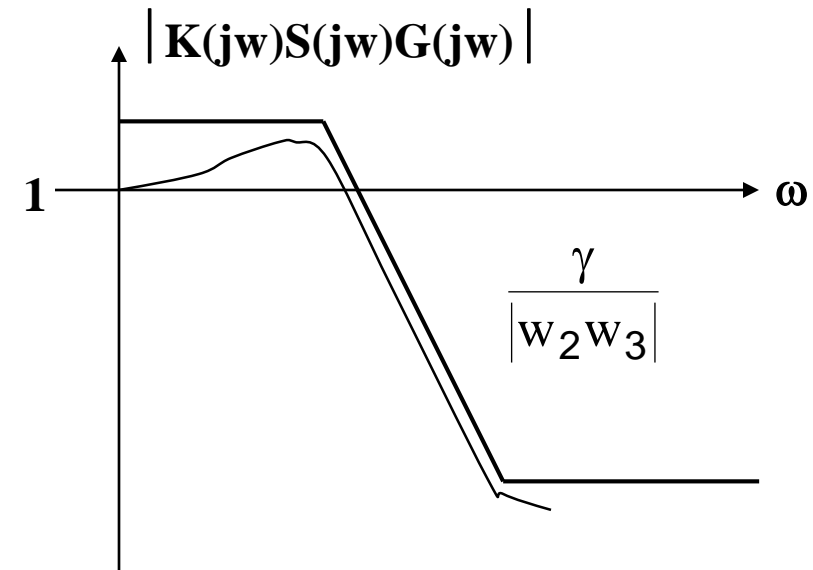
Allure typique des différents gabarits

consigne → commande



- Les valeurs K_2 et k_2 du gabarit sur KS ont en général assez peu d'importance, tandis que le paramètre le plus utile est ω_2

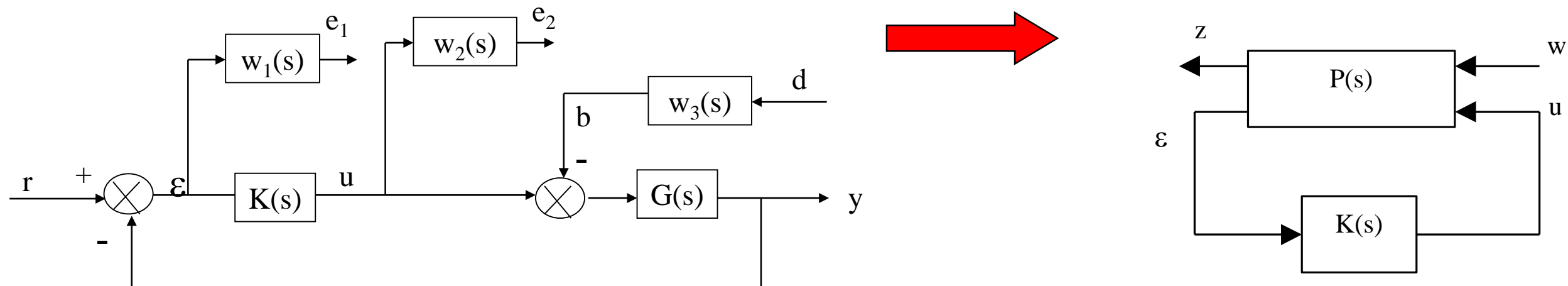
perturbation → commande



- Dans certains cas on peut préférer ajuster par $w_3(s)$ le gabarit sur KSG plutôt que le gabarit sur SG, afin par exemple de satisfaire un gabarit d'atténuation assurant la robustesse de la stabilité aux dynamiques négligées.
- Mais $w_3(s)$ permet également de modifier le comportement de SG en moyenne fréquence, ce qui peut s'avérer utile pour obtenir un comportement transitoire correct en réponse à une perturbation.

Mise sous forme standard

- En pratique, on choisit les filtres $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$ d'après les considérations précédentes et on résout le problème H_∞ correspondant, qui donne la valeur de γ et le correcteur.
- Bien sur la valeur de γ n'est pas connue à l'avance, elle intervient dans les gabarits et on oriente le choix des filtres de façon à avoir une valeur de γ proche de 1.
- Une fois les filtres choisis, il reste à mettre le problème sous la forme standard, i.e.,



Identification des E/S

Entrées

– $w = [r, d]^T$

Signaux surveillés

– $z = e = [e_1, e_2]^T$

Entrées du correcteur

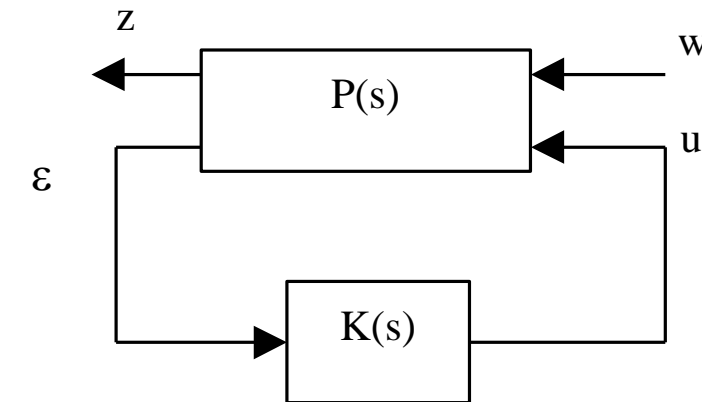
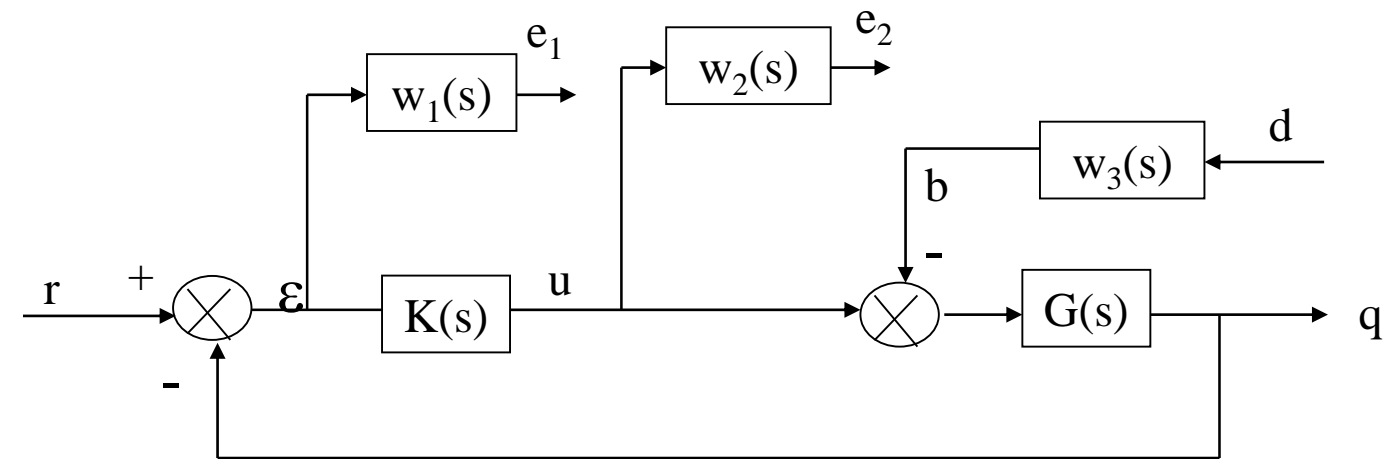
– ε

Sorties du correcteur

– u

La représentation d'état

$$P(s) := \begin{pmatrix} \dot{x} \\ z \\ \varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ w \\ u \end{pmatrix}$$



utilisée pour résoudre le pb H_∞ est obtenue en considérant une représentation d'état pour chaque fonction de transfert $G(s)$, $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$

Représentation d'état

□ Pour chaque fonction de transfert $G(s)$, $w_1(s)$, $w_2(s)$, $w_3(s)$

$$G(s) = (\text{entrée} := u - b \quad \text{sortie} := y)$$

$$= \begin{cases} \dot{x} = Ax + B(u - b) \\ y = Cx \end{cases}$$

$$w_1(s) = (\text{entrée} := \varepsilon \quad \text{sortie} := e_1)$$

$$= \begin{cases} \dot{x}_1 = A_1x_1 + B_1(r - z) \\ e_1 = C_1x_1 + D_1(r - z) \end{cases}$$

$$w_2(s) = (\text{entrée} := u \quad \text{sortie} := e_2)$$

$$= \begin{cases} \dot{x}_2 = A_2x_2 + B_2u \\ e_2 = C_2x_2 + D_2u \end{cases}$$

$$w_3(s) = (\text{entrée} := d \quad \text{sortie} := b)$$

$$= \begin{cases} \dot{x}_3 = A_3x_3 + B_3d \\ b = C_3x_3 + D_3d \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -BC_3 \\ -B_1C & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -BD_3 \\ B_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & B_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \\ B_2 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D_1C & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ D_2 \end{pmatrix} u$$

$$\varepsilon = (-C \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + (I \ 0) \begin{pmatrix} r \\ d \end{pmatrix} + (0)u$$



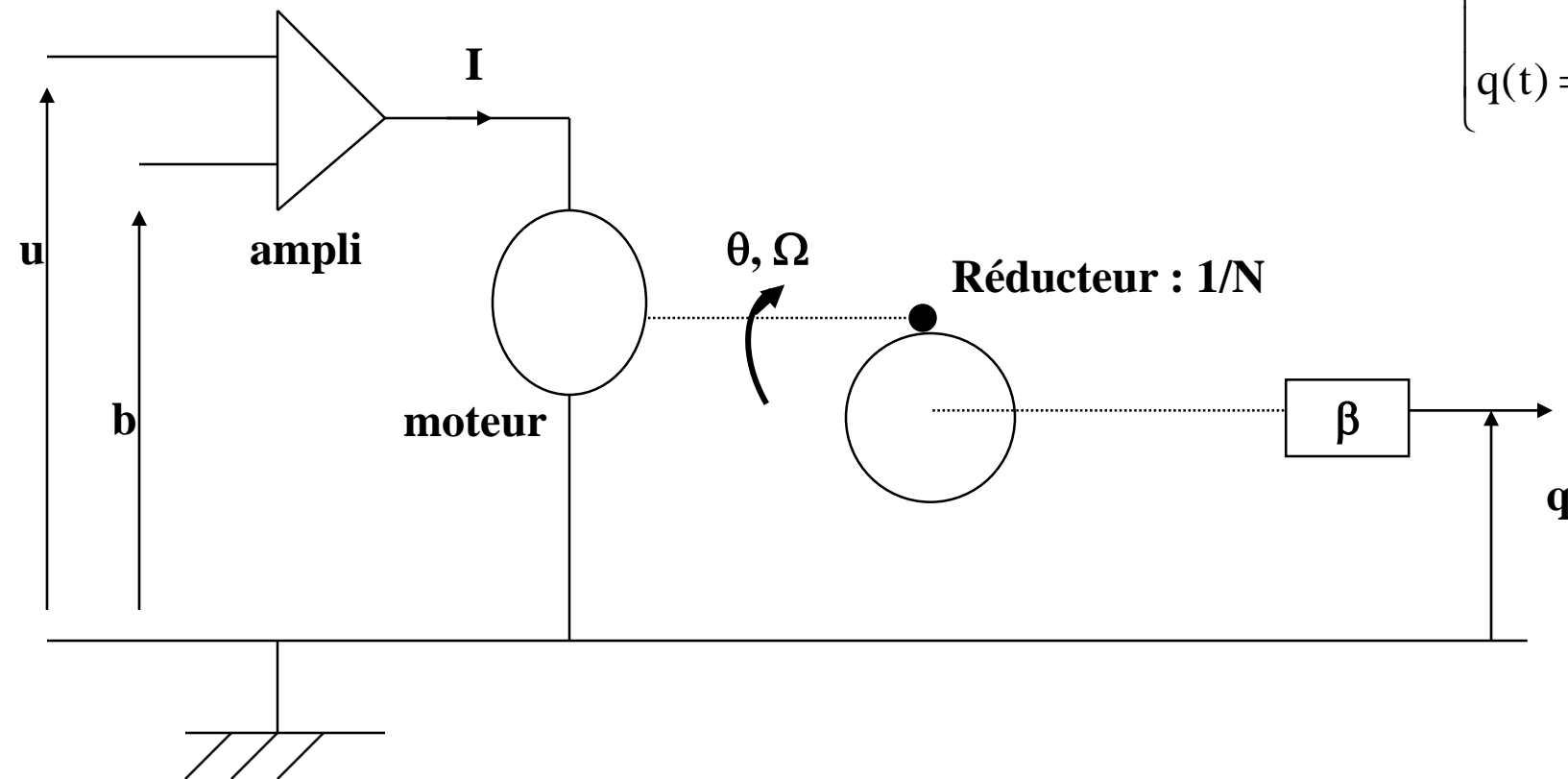
Conditions d'existence par résolution LMI

- **Hyp: On considère (A, B) stabilisable et (C, A) détectable.**
 - la partie non commandable est constituée par le filtre $w_3(s)$ et la partie non observable par les filtres $w_1(s)$, $w_2(s)$
 - L'hypothèse de détectabilité et de stabilisabilité impose donc de choisir des filtres à pondération stables.

Exemple

Modélisation

□ Moteur à courant continu



$$\begin{cases} L \frac{dI}{dt} = -RI(t) - K_e \Omega(t) + A(u(t) + b) \\ J \frac{d\Omega}{dt} = K_c I(t) - a\Omega(t) \\ \Omega(t) = \frac{d\theta}{dt} \\ q(t) = \frac{\beta}{N} \theta(t) \end{cases}$$

□ où

- u est la tension de commande
- b une perturbation constante (type tension offset)
- q la mesure de position



Objectifs et modèle de synthèse

□ Objectifs de l'asservissement

- BP : $\omega_c=100\text{rd/s}$
- marges de module : 0.6 ($=1/K_1$)
- amplitude de la commande « raisonnable »
- erreur statique du à b inférieure à 1%
- gain entre la référence et la commande inférieure à 2 pour tout w

□ Modèle de synthèse simplifié

$$G(s) = \frac{Q(s)}{U(s)} = \frac{240}{s(1 + 0.015s)}$$

- pour effectuer l'asservissement, on peut considérer ce modèle simplifié ($L=0$), car la constante de temps ainsi négligée $L/R=0.862 \cdot 10^{-3}$ ($p \sim 10^4$) est hors de la BP



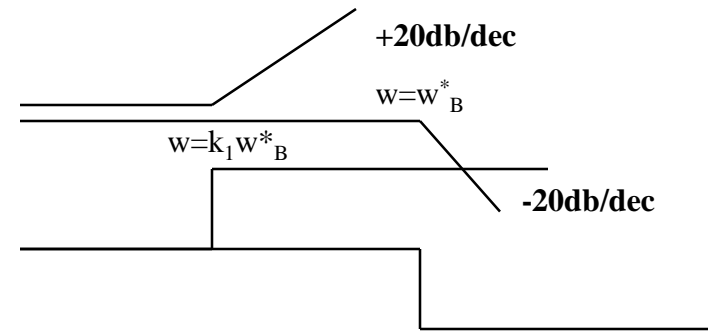
Proposer les filtres w_1 , w_2 et w_3

□ Le filtre $w_1(s)$ est choisi de telle sorte que le bode de $1/|w_1(s)|$

- » coupe l'axe 0_{db} à $100rd/s$ (BP demandée)
- » présente un gain en haute fréquence de $1.7 (=1/0.6)$ de façon à limiter la norme H_∞ de la fonction de sensibilité et garantir ainsi une marge de module de 0.6
- » présente un gain suffisamment faible en basse fréquence

□ Soit

$$W_1^{-1}(s) = k_1 \frac{\frac{s}{w_B^*} + 1}{\frac{s}{K_1 w_B^*} + 1}$$

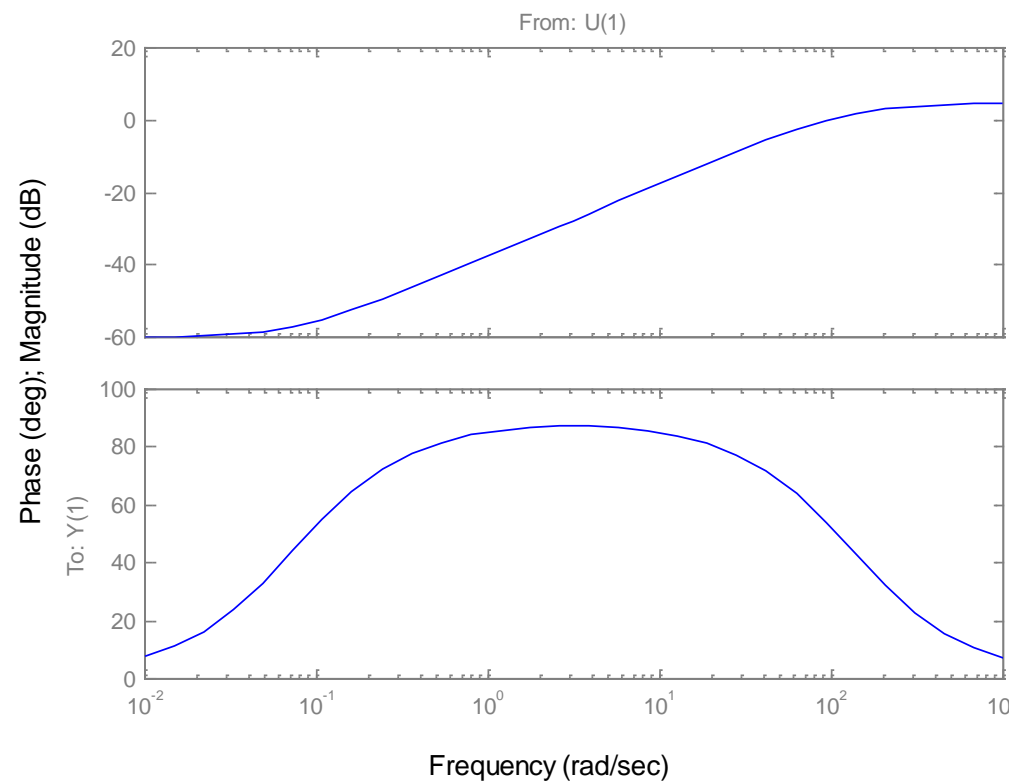


Bode Diagrams

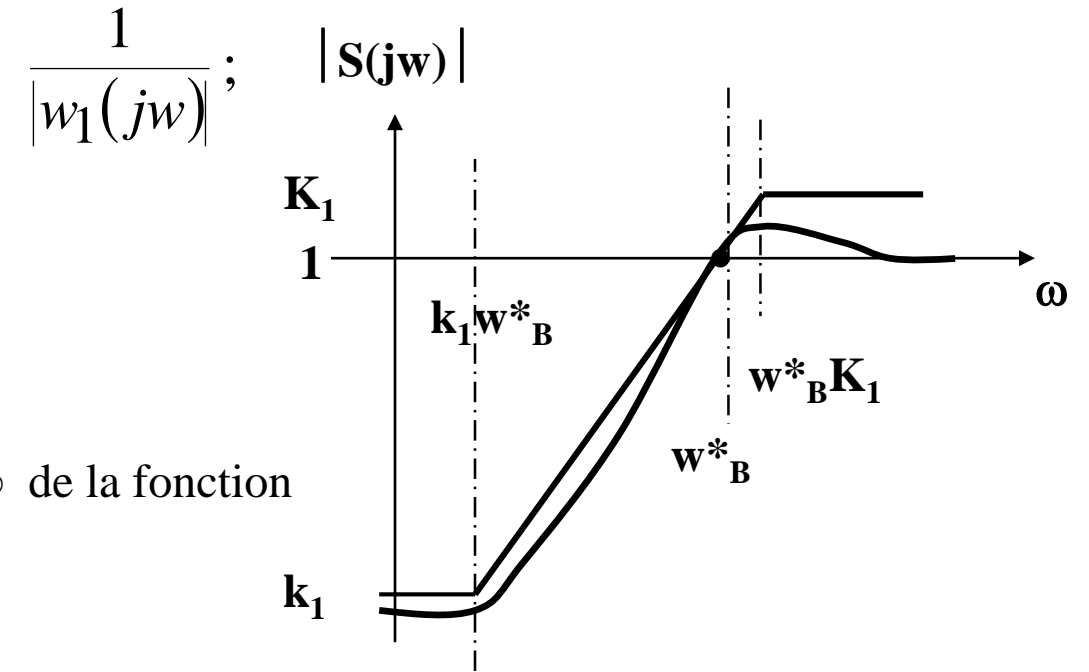
Bode de $1/w_1(s)$



Phase de $1/w_1(s)$



consigne → écart



$$\begin{pmatrix} e \\ u \end{pmatrix} \|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} S & SG \\ KS & KSG \end{pmatrix} \right\| < \gamma \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & w_2(s)K(s)S(s)G(s)w_3(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

$$\min_{R=R^T, S=S^T} \gamma \text{ sous (24a, b, c)}$$



Proposer les filtres w_1 , w_2 et w_3

Le filtre $w_2(s)$ est choisi de telle sorte que

- le gain de correcteur chute dans les hautes fréquences
 - » afin de limiter la sensibilité au bruit
 - » et tenir compte du caractère incertain du modèle dans cette zone
 - » Rappel : on a négligé le pole $1/L/R=10^4$

Procédure,

- On fixe $w_2(s)=w_3(s)=10^{-2}$ (par exemple)
 - » on ajuste w_2 de telle sorte que la fonction de sensibilité S suive au plus près le gabarit $1/w_1$ et assure un γ proche de 1
 - » la valeur $w_2=0.5$ ($1/w_2=2$) est retenue, valeur pour laquelle la norme H^∞ de la matrice pondérée

$$\left\| \begin{pmatrix} w_1(s)S(s) & w_1(s)S(s)G(s)w_3(s) \\ w_2(s)K(s)S(s) & w_2(s)K(s)S(s)G(s)w_3(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty < \gamma$$

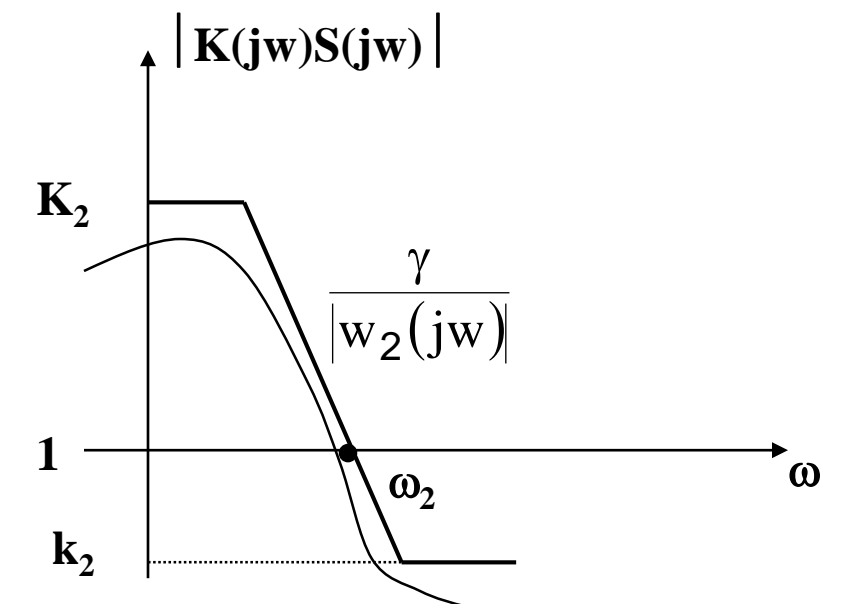
- » donne $\gamma = 0.957$ et assure donc un transfert consigne/commande < 2 pour tout w
- On augmente progressivement w_3 jusqu'à atteindre effet significatif sur γ , en veillant toutefois à ce que celui-ci ne dépasse pas excessivement 1 :
 - » on obtient $\gamma = 1.1$ pour $w_3 = 0.015$

- Enfin on introduit une atténuation en haute fréquence sur le gabarit $1/|w_2|$ pour filtrer le pole $1/L/R=10^4$ négligé

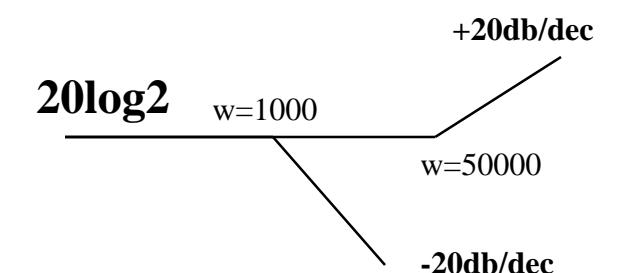
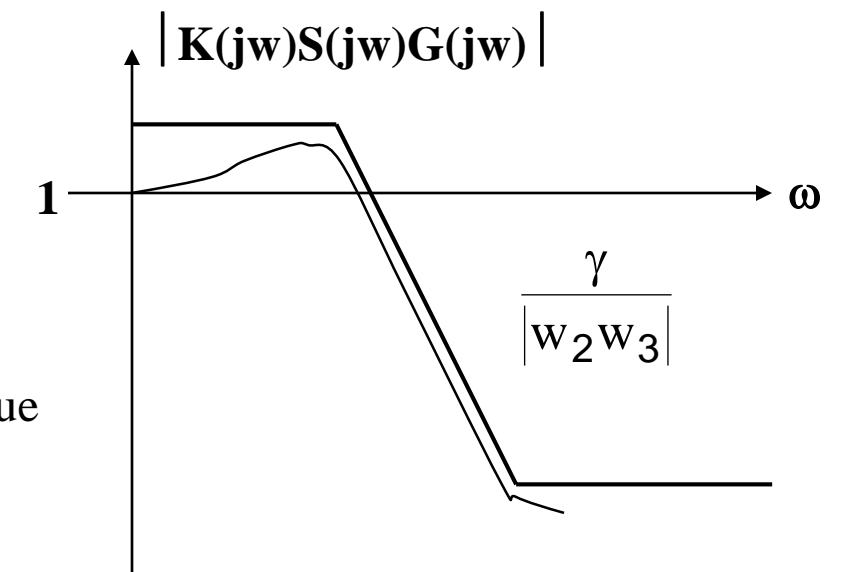
$$\frac{1}{w_2(s)} = \frac{1+s/50000}{0.5(1+s/1000)}$$

Rq: le filtre $W_2(s)$ assure un transfert directe, i.e., $D \neq 0$ (Hyp H_2 est ainsi vérifiée)

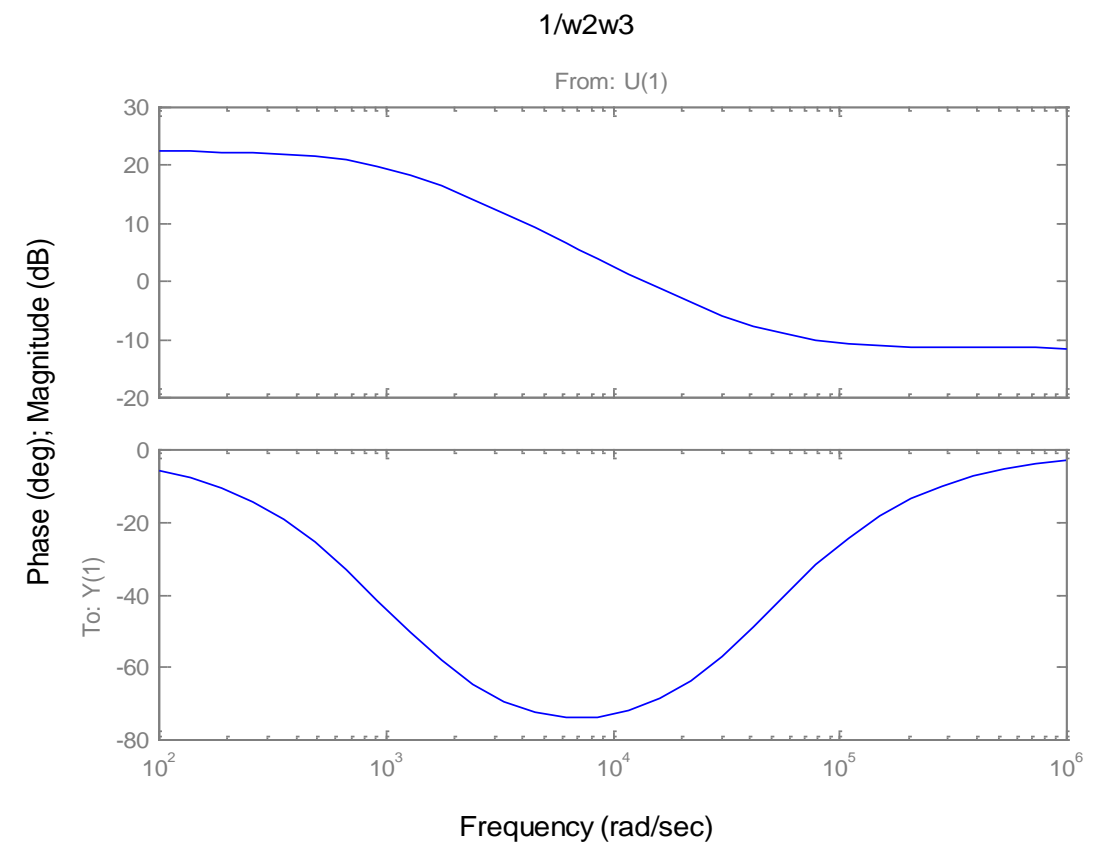
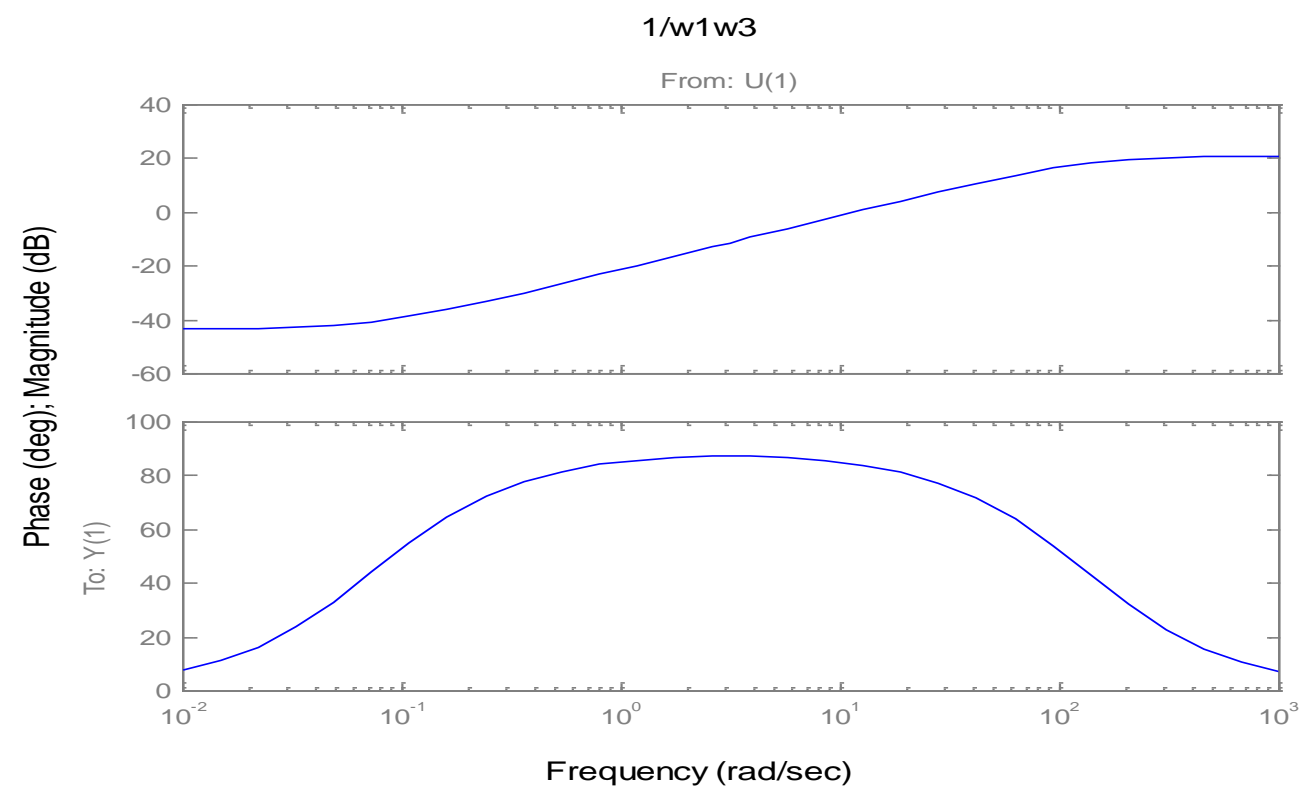
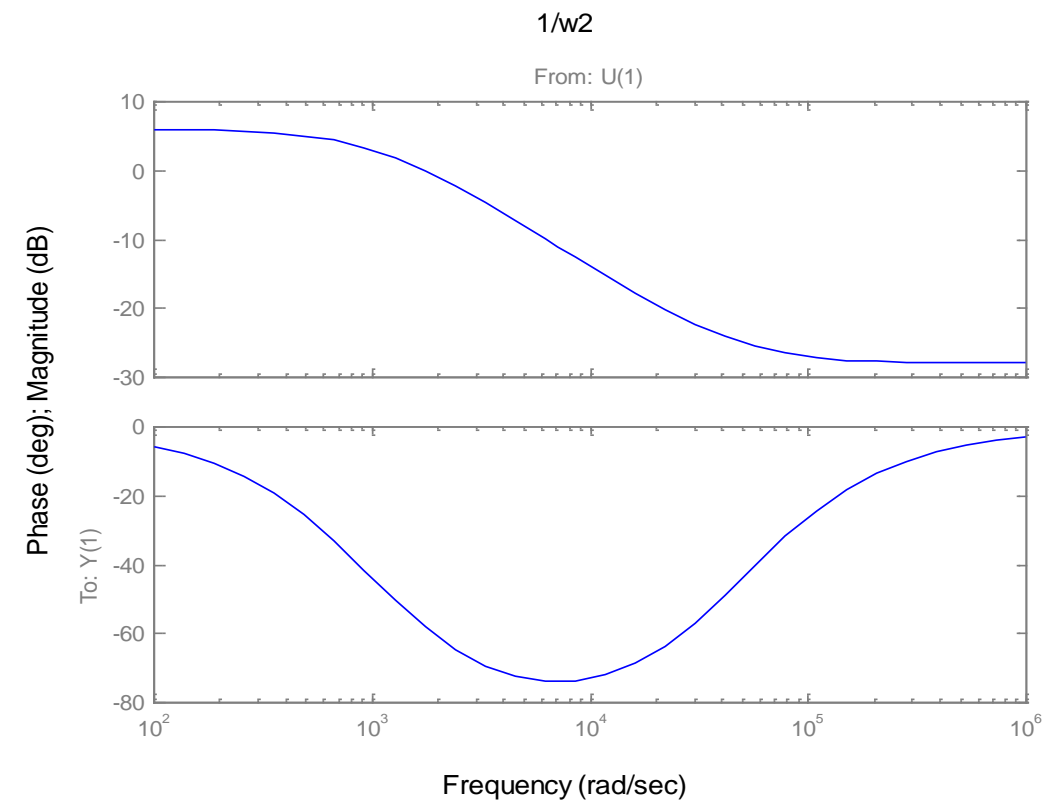
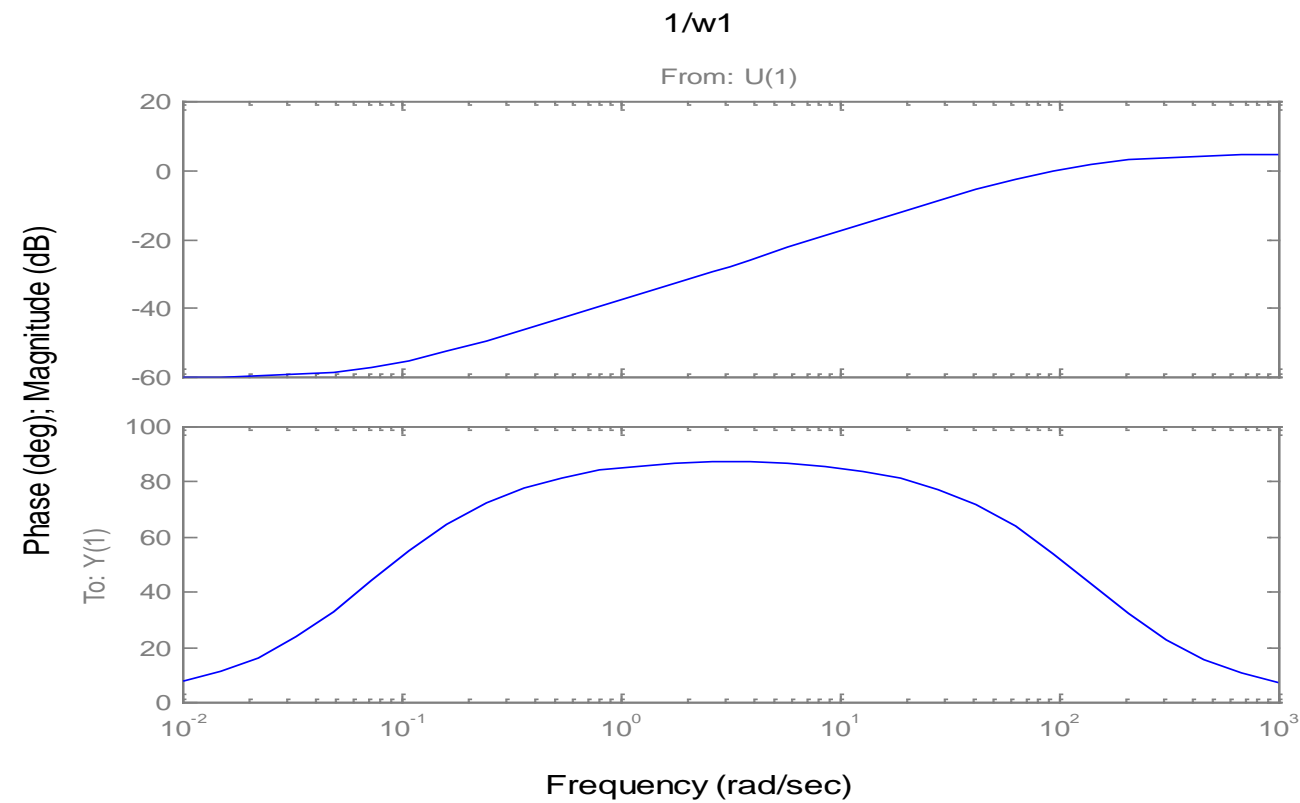
consigne \rightarrow commande



perturbation \rightarrow commande



Réponses fréquentielles des transmittances $1/w_1$, $1/w_2$, $1/w_1w_3$, $1/w_2w_3$



Recherche de K

□ Les LMI 24a,b,c étant vérifiées,

» a partir des matrices R et S solutions du problème précédent une résolution par LMI donne le correcteur K

$$K(s) = \frac{9.675}{s + 0.075} \frac{(1 + s/26)}{(1 + s/375)} \frac{(1 + s/64)}{(1 + s/931)} \frac{(1 + s/50000)}{(1 + s/22500)}$$

» cette résolution consiste à résoudre la BMI suivante en $X = X^T > 0$ obtenue à partir du système bouclé augmenté du correcteur K

$$\begin{pmatrix} A_f^T X + X A_f & X B_f & C_f^T \\ B_f^T X & -\gamma I_{n_w} & D_f^T \\ C_f & D_f & -\gamma I_{n_z} \end{pmatrix} < 0$$

□ Système bouclé augmenté du correcteur

$$K = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}; \quad \begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c y \\ u = C_c x_c + D_c y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_f & B_f \\ C_f & D_f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x_c \\ w \end{pmatrix}$$

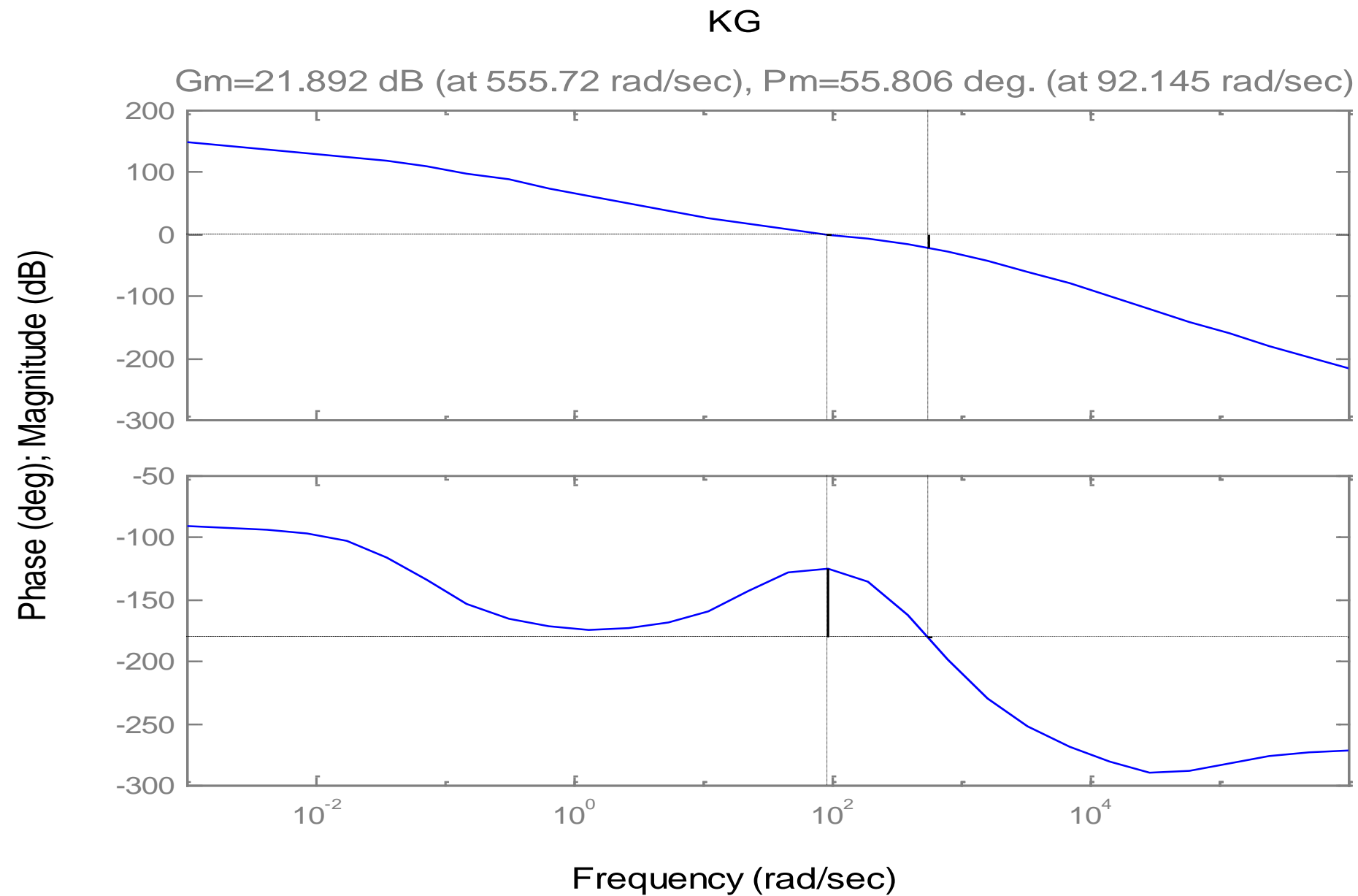
» cela est une BMI en X, A_c, B_c, C_c, D_c, et devient une LMI en A_c, B_c, C_c, D_c, par une SVD de X telle que

$$X = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & -M^+ R N \end{pmatrix}$$

» dont la résolution fournit le correcteur K

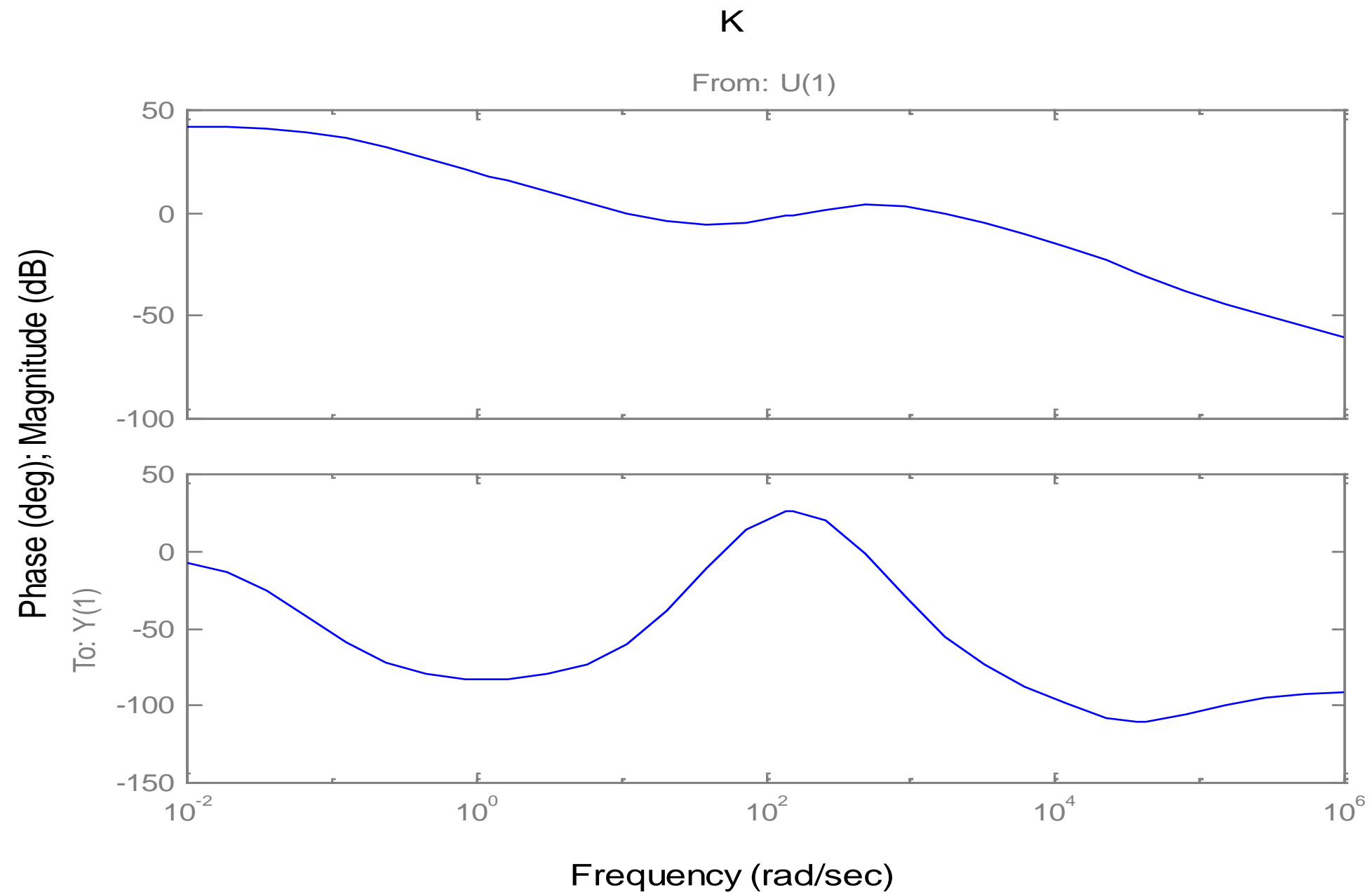
Réponse fréquentielle de la BO

- Le cahier des charges de BO est vérifiée
 - » la pulsation au gain unité est égale à 100rd/s
 - » les marges de gain et de phase sont égales à 20db et 55° respectivement



Réponse fréquentielle du correcteur

- le correcteur présente un gain élevé (ce qui assure une erreur statique négligeable vis à vis des perturbations constantes)
- le correcteur présente une avance de phase au voisinage de la BP et un filtrage des HF



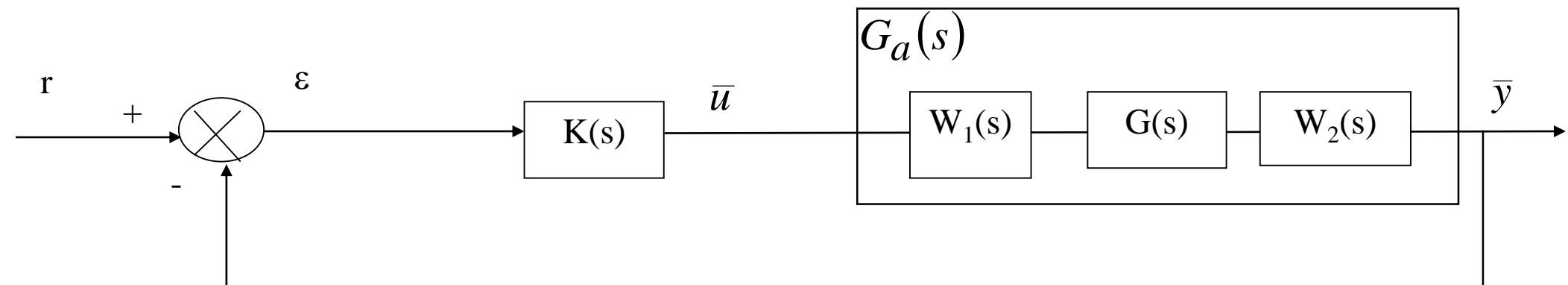
Réduction du correcteur

- ❑ **Le correcteur à un pôle en -0.075 proche de l'origine et un pôle en -22500 très éloigné dans le demi plan gauche,**
 - son influence est négligeable sur les réponses fréquentielles
- ❑ **Remplacement du pôle en -0.075 par un pôle en zéros**
- ❑ **Suppression des polynômes $1+s/50000$ et $1+s/22500$**
 - => réduction d'une unité l'ordre du correcteur sans changer en rien ses performances
- ❑ **On implante finalement le correcteur ci-dessous, lequel est décrit par un correcteur PI, un filtre à avance de phase et un filtre passe bas intervenant au-delà de la BP :**

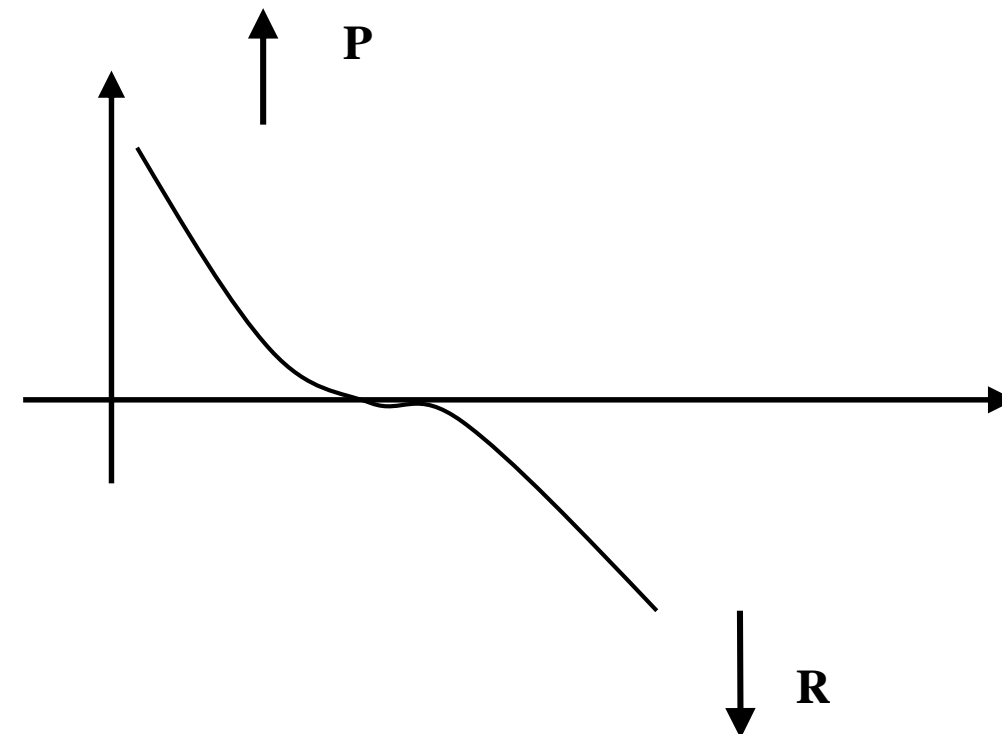
$$K(s) = \frac{9.675(1+s/26)(1+s/64)}{s(1+s/375)(1+s/931)}$$

Commande H_∞ par modelage du transfert de boucle (loop shaping)

- On appliquera pour cela la synthèse H_∞ standard avec insertion de pré et post filtre dans la boucle de régulation.



- Le problème revient alors à fixer ces filtres W_1 et W_2 de telle sorte que le compromis Performance/Robustesse soit atteint



Méthodologie

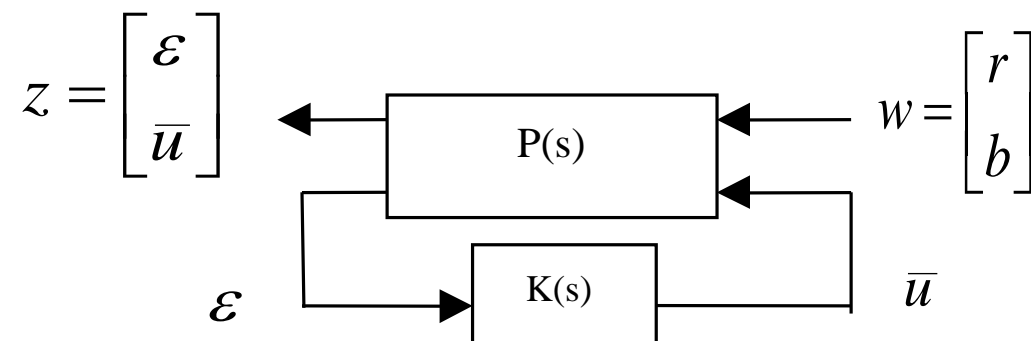
□ On Ajuste les filtres W_1 et W_2 de telle sorte que les valeurs singulières de $G_a(s) = W_2(s)G(s)W_1(s)$

- présentent un gain élevé en BF (assurant ainsi le rejet des perturbations constantes et le suivi de consigne)
- une coupure de l'axe 0db à 100rd/s (BP souhaitée)
- une atténuation en HF (robustesse des dynamiques négligées et bruits)

□ Résoudre le problème H_∞ standard. On considèrera pour cela le procédé augmenté $G_a(s)$, la fonction de sensibilité $S = (1 + KG_a)^{-1}$, la matrice de transfert

$$\begin{pmatrix} \varepsilon \\ \bar{u} \end{pmatrix} \quad \|M\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} S & SG_a \\ KS & KSG_a \end{pmatrix} \right\| < \gamma \quad \begin{pmatrix} r \\ b \end{pmatrix}$$

□ et la réalisation $P(s)$ issue du problème de synthèse H_∞ standard, à savoir



Hypothèse classique sur la boucle de transfert en BF

□ La première inégalité $\bar{\sigma}(S_a) < \gamma$ assure que la MM est supérieure à $\frac{1}{\gamma}$. En conséquence ajuster le filtre pour une marge de module $> 1/2$ implique un $\gamma < 2$

□ Pour des systèmes mono variable un seul filtre suffit, on ne parle pas de pré et post filtre.


□ En basse fréquence, généralement $|G_a K| \gg 1$ soit $|S_a| \cong \frac{1}{|G_a K|} < \gamma$ $|S_a G_a| \cong \frac{1}{|K|} < \gamma$

 $\gamma > 1$ $|K S_a| \cong \frac{1}{|G_a|} < \gamma$ $|K S_a G_a| \cong 1 < \gamma$

$$\frac{1}{|K|} < \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\underline{\sigma}(K)} < \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} < \underline{\sigma}(K)$$

$$\frac{1}{|G_a K|} < \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\underline{\sigma}(G_a K)} < \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\gamma} < \underline{\sigma}(G_a K)$$

□ Or $\frac{1}{\gamma} < \underline{\sigma}(K)$, $\underline{\sigma}(G_a K) \geq \underline{\sigma}(G_a) \underline{\sigma}(K)$ et $\underline{\sigma}(G_a K) \geq \underline{\sigma}(G_a) \underline{\sigma}(K) > \frac{1}{\gamma} \underline{\sigma}(G_a)$ soit

 $\underline{\sigma}(G_a K) > \frac{1}{\gamma} \underline{\sigma}(G_a)$

Hypothèse classique sur la boucle de transfert en HF

□ En haute fréquence, généralement $|G_a K| \ll 1$ soit

$$|S_a| \cong 1 < \gamma \quad |S_a G_a| \cong |G_a| < \gamma$$

$$|KS_a| \cong |K| < \gamma \quad |KS_a G_a| \cong |KG_a| < \gamma$$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}(G_a K) < \gamma$$

– Or $\bar{\sigma}(G_a K) < \bar{\sigma}(G_a)\bar{\sigma}(K)$ et $\bar{\sigma}(K) < \gamma$

$$\Rightarrow \bar{\sigma}(G_a K) \leq \bar{\sigma}(G_a)\bar{\sigma}(K) < \gamma\bar{\sigma}(G_a)$$

□ En conclusion on vient de montrer que le transfert de boucle est borné

en basse et haute fréquence respectivement par $\underline{\sigma}(G_a K) > \frac{1}{\gamma}\underline{\sigma}(G_a)$ et $\bar{\sigma}(G_a K) < \gamma\bar{\sigma}(G_a)$

□ Il suffit dès lors d'ajuster G_a et si une solution LMI existe au Pb H_∞ standard alors nécessairement le compromis performance/robustesse du transfert de boucle sera assuré au facteur près γ^{-1}, γ



Commande H_∞ par introduction de fonction de pondération: application système incertain

- **Commande d'une injection de moteur diesel**
- **extrait de « application of H-infinity design to automotive fuel control » Nippondenso Co. (premier équipementier automobile japonais) et du cours de G. Scorletti (voir ref.)**
 - Les normes anti-pollutions, le prix du carburant et les demandes des consommateurs en matière de performance rendent indispensable l'injection d'une quantité relativement précise du carburant.
 - Le système à commander est donc une injection de carburant pour moteur diesel.
 - Descriptif: Le carburant alimente la chambre de compression où il est comprimé par la came. Sa mise sous pression le pousse par l'injecteur dans la chambre de combustion du moteur. Dans cette chambre de compression une fuite existe. Elle est ouverte (fermée) par une sorte d'anneau qui translate de droite à gauche (de gauche à droite). Cela permet de commander la quantité de carburant entrant dans la chambre de combustion. Le déplacement de l'anneau est commandé via un bras de levier par un solénoïde. On va donc agir sur le courant envoyé dans ce dernier. La position de l'anneau est mesurée par un capteur de position placés près de l'actionneur. C'est cette position qui va être commandée.



Cahier des charges

- **Les spécifications que doit satisfaire le système se traduisent par l'asservissement de la position de l'anneau. On cherche un contrôleur qui permettent de remplir les spécifications suivantes :**
 - 1) Suivi de consigne échelon
 - 2) Rapidité de la réponse (0.2 sec)
 - 3) Fonctionne pour plusieurs températures (0°, 25° et 60°)
 - 4) Pour des raisons d'implémentation il faut établir un correcteur de faible complexité

- **Les spécifications de performances (spécifs. 1 et 2), de robustesse (spécif. 3) et de simplicité (spécif. 4) du cahier des charges sont traduites en minimisant la norme hinfini d'une matrice de transfert solution du problème. Mais pour cela il est nécessaire de disposer d'un modèle.**

Modèle du système

- **Le comportement de l'injection pourrait être considéré comme linéaire si le carburant n'avait pas une viscosité fluctuant fortement avec la température. Les informations dont on dispose sur le système sont obtenues par identification de 3 modèles linéaires stationnaires**

$$G_{00}(p) = \frac{-1.736e^{-2} p^2 + 493.9 p - 3.137 \times 10^5}{p^3 + 98.34 p^2 + 9223 p + 8.771 \times 10^4}$$

$$G_{25}(p) = \frac{5.5 p^2 + 400 p - 4.4 \times 10^5}{p^3 + 93.7 p^2 + 9520 p + 1.21 \times 10^5}$$

$$G_{60}(p) = \frac{4.677 p^2 - 286 p - 5.05 \times 10^5}{p^3 + 91.53 p^2 + 10^4 p + 1.72 \times 10^5}$$

Modèle d'incertitude additive

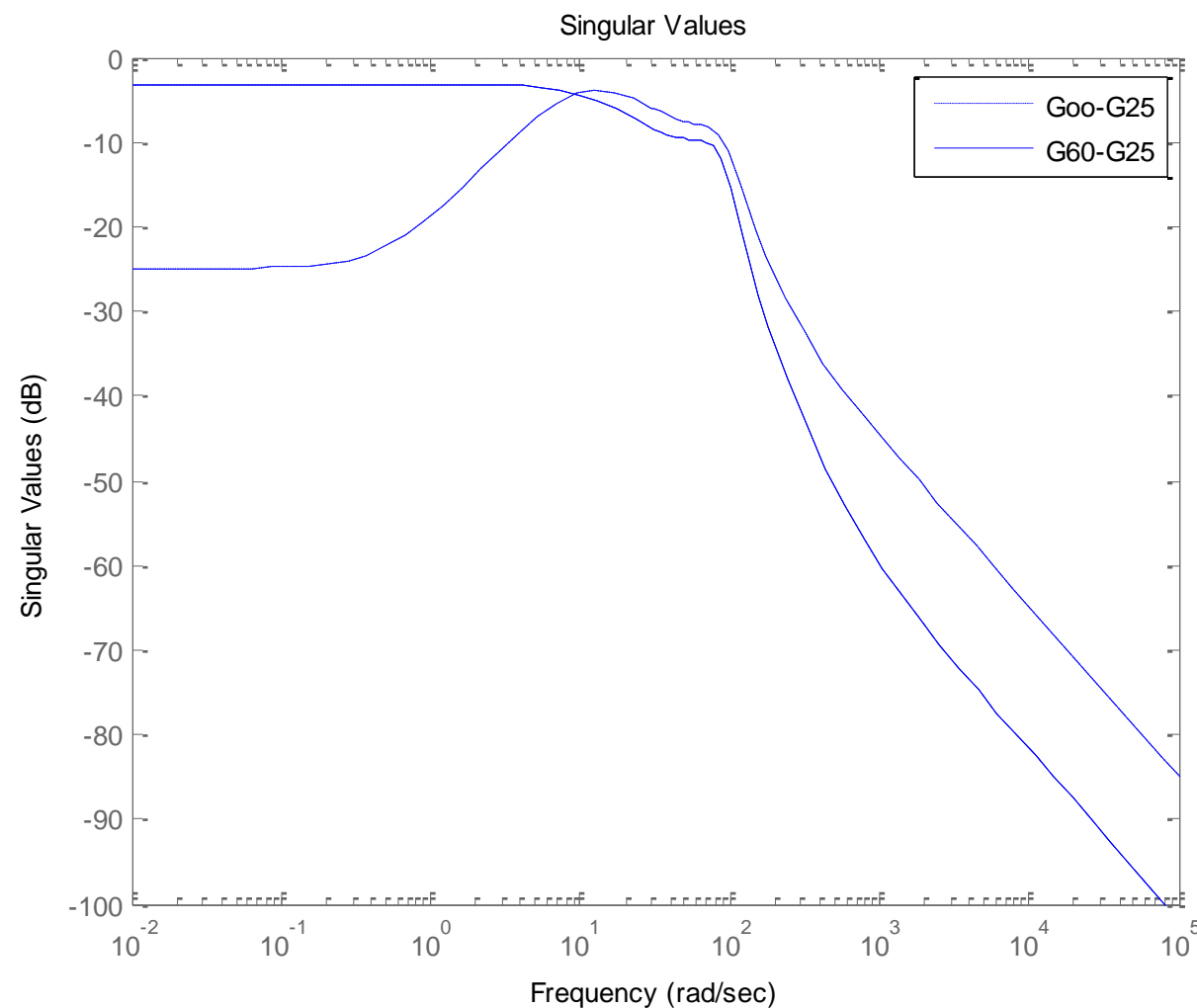
- On décide de tenir compte de ces trois modèles en définissant un modèle d'incertitude additive correspondant à un ensemble de systèmes $G(p)$ tels que :

$$G(p) = G_{25}(p) + \Delta(p)$$

- Où $\Delta(p)$ est caractérisé par un transfert $W_{\Delta}(j\omega)$ tel que $|\Delta(j\omega)| \leq |W_{\Delta}(j\omega)|$.

- Ici $W_{\Delta}(j\omega)$ est choisi tel que:

$$\begin{cases} |G_{00}(j\omega) - G_{25}(j\omega)| \leq W_{\Delta}(j\omega) \\ |G_{60}(j\omega) - G_{25}(j\omega)| \leq W_{\Delta}(j\omega) \end{cases}$$



Tracés de $|G_{00}(j\omega) - G_{25}(j\omega)|$, $|G_{60}(j\omega) - G_{25}(j\omega)|$

Critère

Construction du critère - Spécifications 1 et 2

- D'après l'étude précédente (transparents 102, 103 et 110) les spécifications de performance 1 et 2 se traduisent par une pondération sur la fonction de sensibilité S qui relie le signal de référence au signal d'erreur de suivi de trajectoires, contrainte définie par une pondération $W_1(s)$.

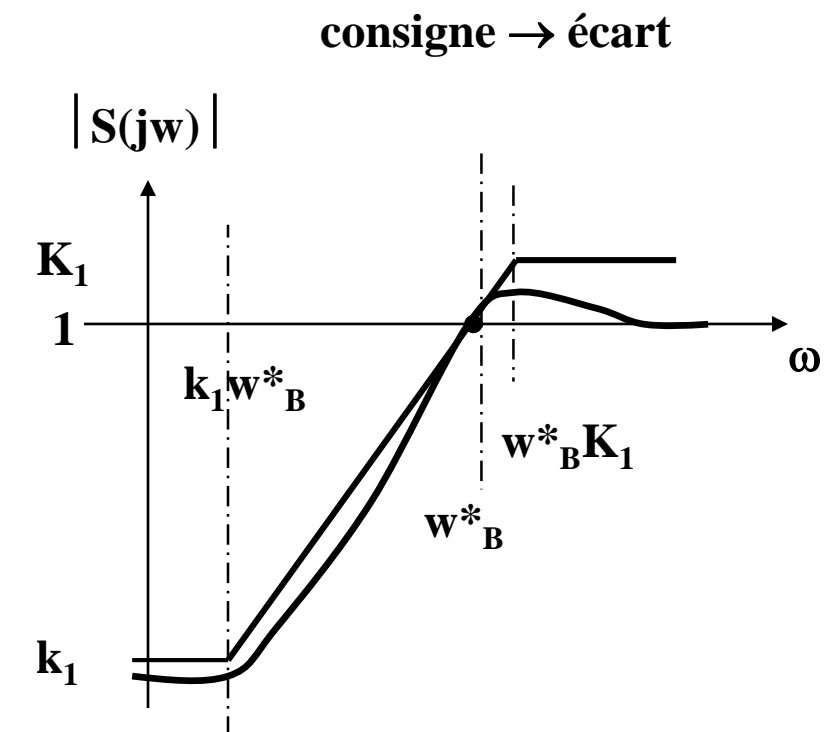
- On souhaite

$$\|w_1(s)S(s)\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow \forall \omega \in \mathfrak{R} \quad |S(j\omega)| < \frac{\gamma}{|w_1(j\omega)|}$$

» soit

$$W_1^{-1}(s) = k_1 \frac{\frac{s}{w_B^*} + 1}{\frac{s}{K_1 w_B^*} + 1}$$

$$\frac{1}{|w_1(j\omega)|};$$



Critère

$$\forall w \in \mathfrak{R} \quad |KS(jw)| < \frac{1}{|W_{\Delta}(jw)|}$$

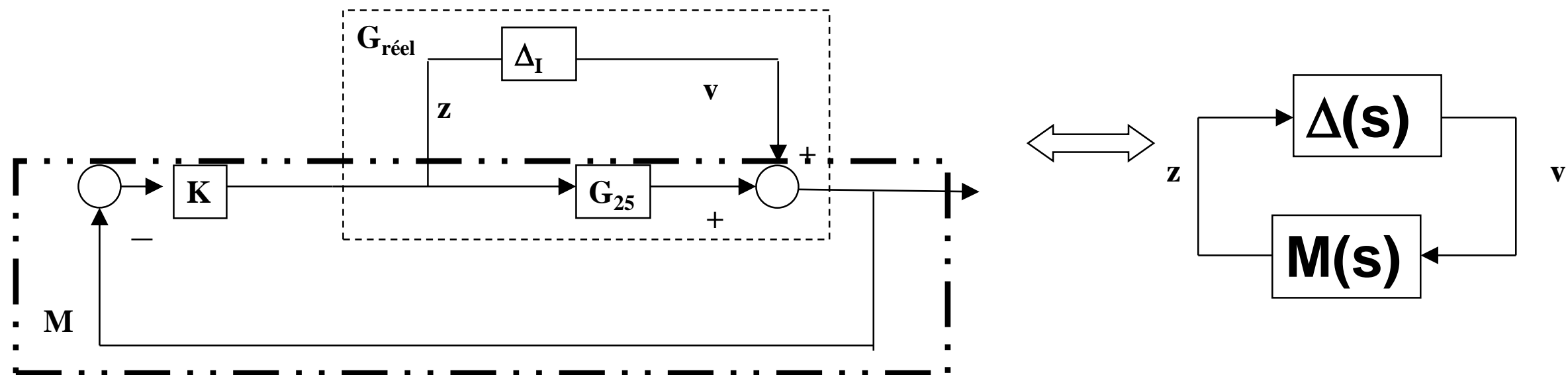
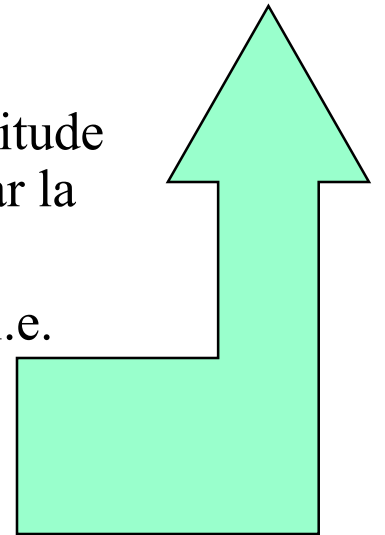
$$\Leftrightarrow \|W_{\Delta}KS\|_{\infty} < 1$$

Construction du critère – Spécification 3

– D’après la discussion précédente, on va chercher à stabiliser les modèles en utilisant un modèle d’incertitude additive qui génère une famille de modèles les contenant. Cette famille d’incertitudes est caractérisée par la pondération fréquentielle $W_{\Delta}(jw)$.

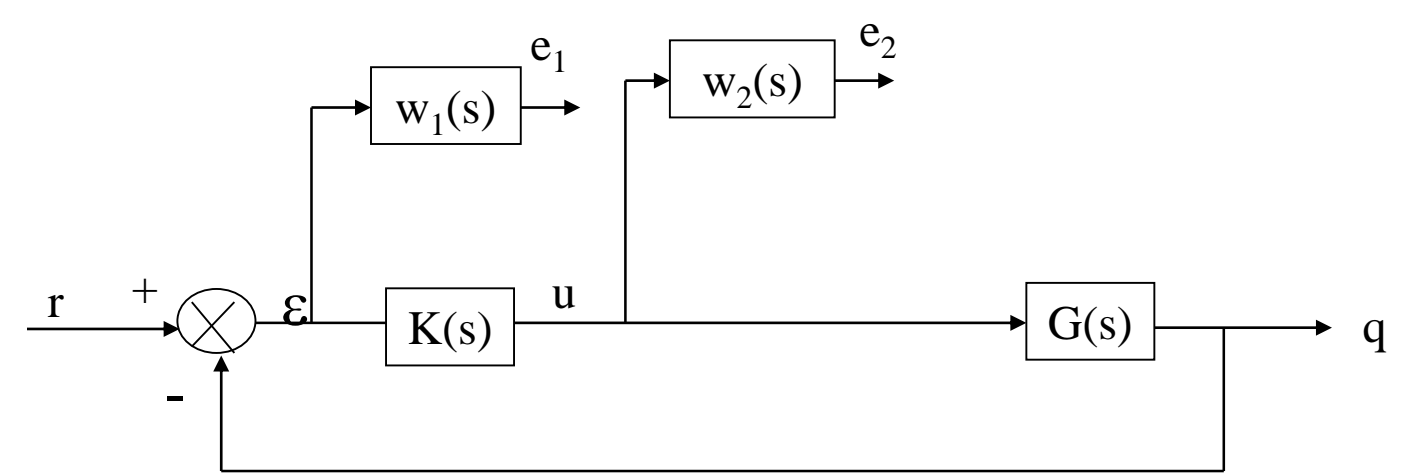
– Par application du théorème du faible gain (voir transparent 51), dans le cas d’une incertitude additive, i.e. $M=KS$, la stabilité robuste sera assurée si $\|KS\|_{\infty} \leq \alpha^{-1} \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad |KS(jw)| < \frac{1}{\alpha}$

où : $|\Delta(jw)| \leq |W_{\Delta}(jw)|$ avec $\|W_{\Delta}\|_{\infty} \leq \alpha \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad |W_{\Delta}(jw)| \leq \alpha \Leftrightarrow \forall w \in \mathfrak{R} \quad \frac{1}{\alpha} \leq \frac{1}{|W_{\Delta}(jw)|}$



Rappel du Théorème du petit gain: Si $M(s)$ et $\Delta(s)$ sont stables, le système de la figure ci-dessus est stable pour tous $\Delta(s)$ tel que $\|\Delta(s)\|_{\infty} \leq \alpha$ si et seulement si $\|M(s)\|_{\infty} \leq \alpha^{-1}$, où $M(s)=H_{zv}(s)$

Limitation du transfert KS

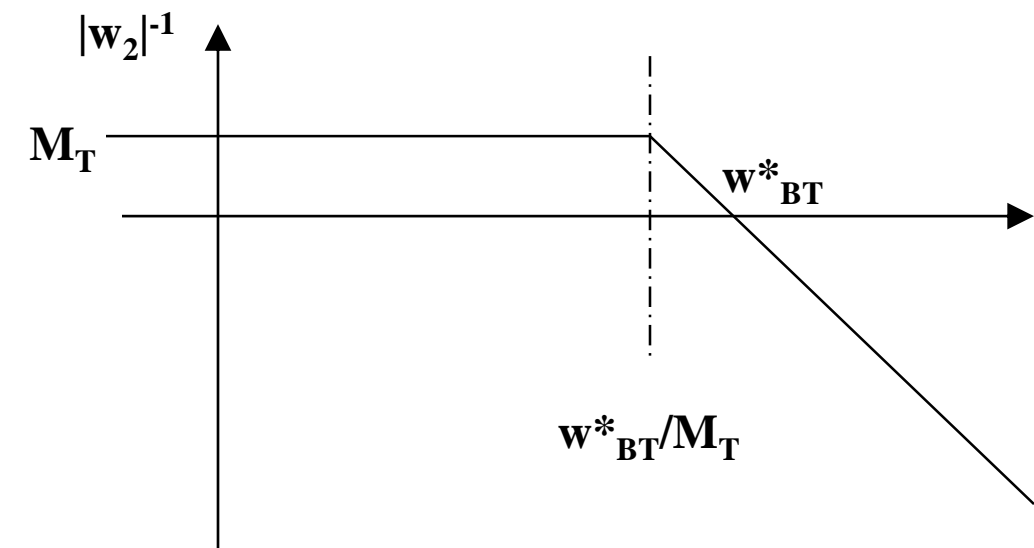


- Enfin il reste à contraindre le module de KS pour limiter l'énergie de commande et l'amplification des bruits de mesure. Pour ces exigences, KS doit être une fonction de transfert passe bas, avec une pulsation de coupure la plus basse possible.
- On choisit donc une pondération W_2 (de la forme $\|W_2KS\|_\infty < 1$) qui inclut l'objectif précédent de stabilité robuste, soit

$$- |W_2(j\omega)| \geq |W_\Delta(j\omega)| \Leftrightarrow \frac{1}{|W_2|} \leq \frac{1}{|W_\Delta|} \quad \forall \omega \in \mathfrak{R}$$

Où

$$w_2(s) = \frac{s}{w_{BT}^*} + \frac{1}{M_T}, \quad w_2^{-1}(s) = \frac{M_T}{\frac{sM_T}{w_{BT}^*} + 1}$$



En résumé il suffit de rechercher un correcteur H_{infini} standard tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} W_1 S \\ W_2 K S \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq 1$$



Diagnosis by observer using an LMI formulation

- **FDI (fault actuator, fault sensor, fault component)**
 - » **robust residual generator using UIO**
 - » **robust residual generator using H_∞ optimization**

- **Fault tolerant**
 - » **H_{infini} regulator/observer**
 - main objective is to recover the original system performance (fault-free)**



Modeling of faulty systems

- **The first step in the model approach is to build a mathematical model of the system**
- **In the case of a non-linear system, this implies a model linearization around an operating point.**
- **A system model (in model-based FDI) can be separated into three parts:**
 - Actuators
 - System dynamics
 - Sensors
- **As illustrated in following figure (1).**

Modeling of faulty Systems

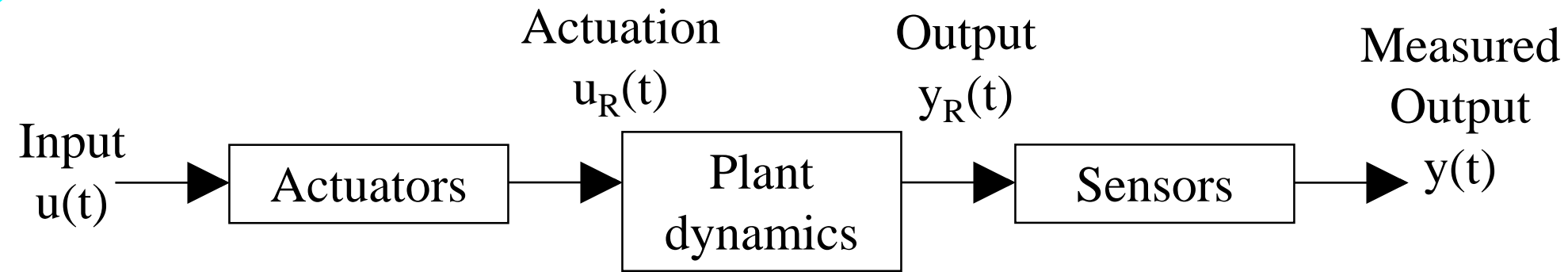


Fig. (1) open-loop system

□ Where

- $\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n$: state vector
- $\mathbf{u}_R \in \mathcal{R}^r$: real input vector to the actuator
- $\mathbf{y}_R \in \mathcal{R}^m$: real system output vector to the actuator

Component and parameter faults

- **The component fault is represented as a change in the dynamic relation**
 - for example, a leak in a water tank in three tank system,

$$\dot{x} = Ax + Bu_R + f_c$$

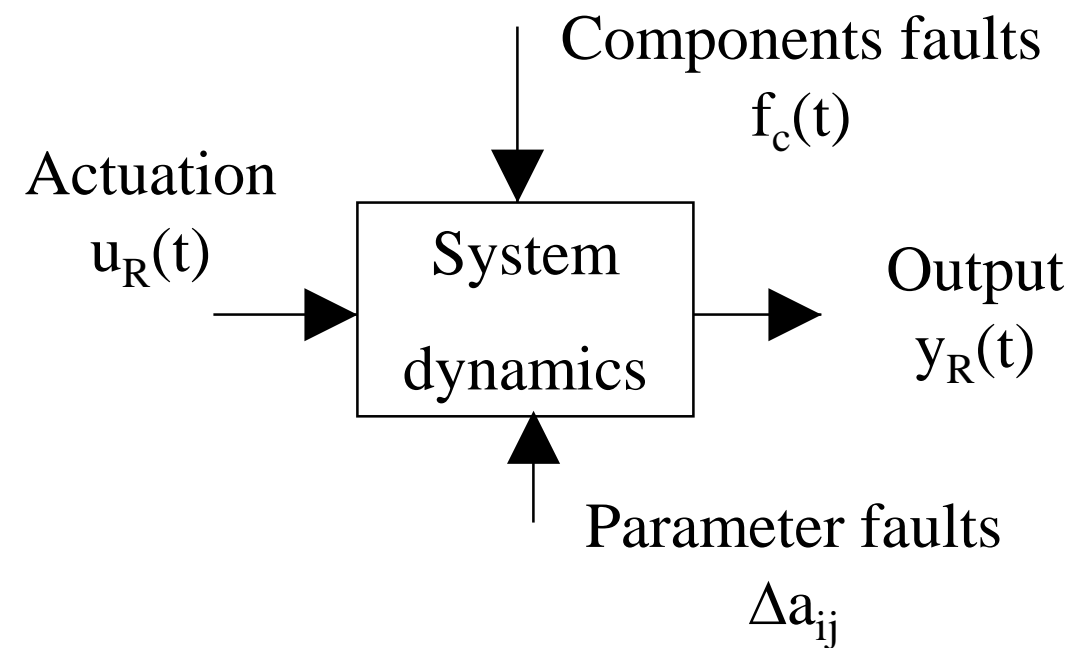


Fig. (1.1) The system dynamics

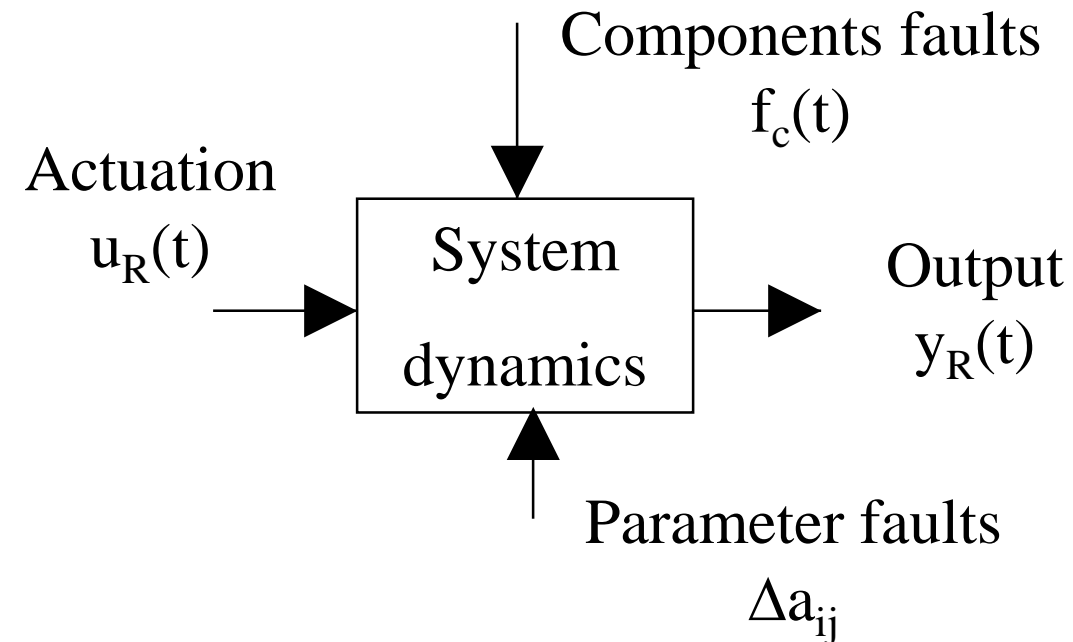
Component and parameter faults

□ In some cases, the fault could be expressed as a change in the parameter system,

– for example a change in the i_{th} row and j_{th} column element of A , the dynamic model can then be described as

– where x_j is the j_{th} element of the vector x and e_i is an n -dimensional vector with all zero elements except a 1 in the i_{th} element

$$\dot{x} = Ax + Bu_R + e_i \Delta a_{ij} x_j$$



Sensor faults

- **By choosing the vector f_s correctly, we can describe all sensor fault situations**
 - for example
 - » Variation in the sensor : $y=(1+\Delta)y_R$ then $f_s=\Delta y_R$
 - » Biased fault at $t=\tau$: $y(t)= y_R+\delta(t-\tau)\Gamma(t-\tau)$ then $f_s= \delta(t-\tau)\Gamma(t-\tau)$

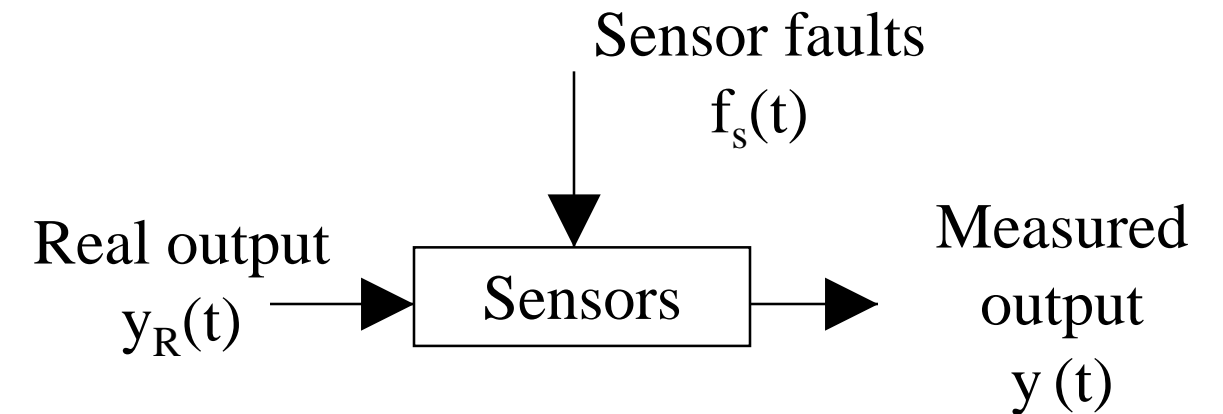


Fig. (1.2). Sensors, output and measured output

Actuator faults

- For a controlled system, u_R is the actuator response to an actuator command $u(t)$ and can be described as (when the actuator dynamics are neglected):

$$u_R(t) = u(t) + f_a(t)$$

where $f_a(t)$ is the actuator fault and $u(t)$ is the known control command

- » Variation in the actuator
- » Biased fault

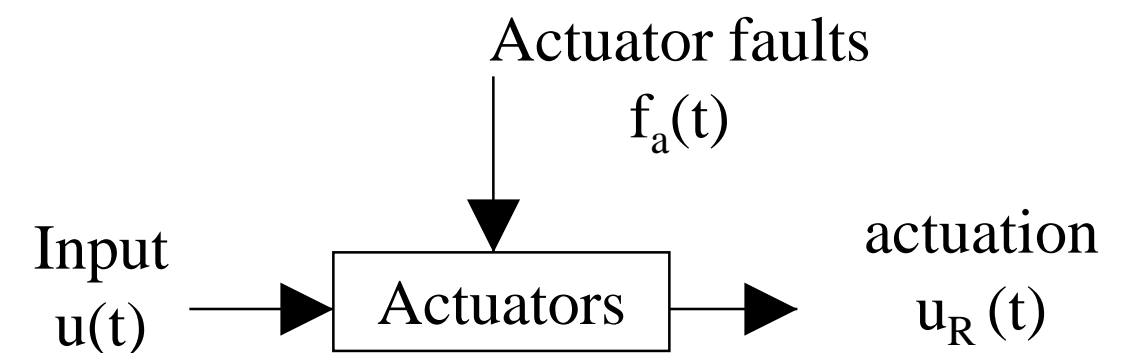


Fig. (1.3). Actuator, input and actuation

Fault Model when sensor, component and actuator faults are considered

- The model is described as

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Bf_a + f_c \\ y &= Cx + Du + Df_a + f_s\end{aligned}$$

- Considering the general cases, a system with all possible faults (f) and UI (d) can be described as

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + R_1 f + E_1 d \\ y &= Cx + Du + R_2 f + E_2 d\end{aligned}$$

– where an input-output transfer matrix representation for the above system is

$$y(s) = G_u(s)u(s) + G_f(s)f(s) + G_d(s)d(s)$$

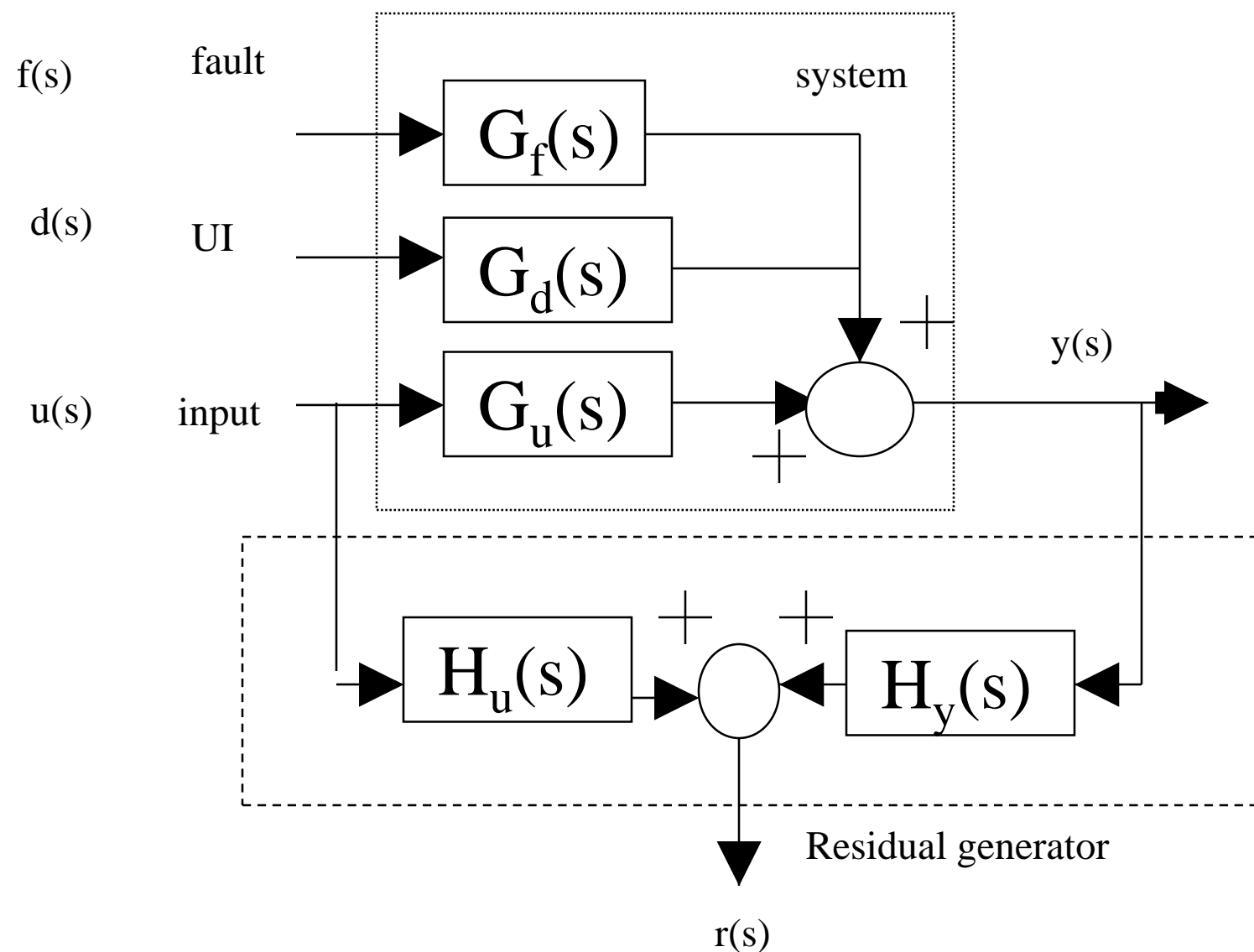


$$G_u(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G_f(s) = C(sI - A)^{-1}R_1 + R_2$$

$$G_d(s) = C(sI - A)^{-1}E_1 + E_2$$

General structure of residual generation in model-based FDI



Here H_u et H_y are stable transfer matrices which are designed such that

$$J(r(t)) \leq T(t) \quad \text{for } f(t) = 0 \quad \text{fault free}$$

$$J(r(t)) > T(t) \quad \text{for } f(t) \neq 0 \quad \text{non zero faulty}$$

where $J(r(t))$ is a residual evaluation function and $T(t)$ a threshold function

$$y(s) - G_u(s)u(s) = G_f(s)f(s) + G_d(s)d(s)$$

$$r(s) = \Omega(s)(y(s) - G_u(s)u(s))$$

$$\text{with } \begin{cases} \Omega(s)G_d(s) = 0 \\ \Omega(s)G_f(s) \neq 0 \end{cases} \quad \text{ideal case}$$

Robust residual generation through standard H_∞ filtering formulations

□ Fault estimation

- To concentrate on fault sensitivity, let us first ignore the UI (d) and known input (u). The system is described as

$$\dot{x} = Ax + R_1 f$$

$$y = Cx + R_2 f$$

» or by the input-output model $y(s) = G_f(s)f(s)$

where

$$G_f(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & R_1 \\ \hline C & R_2 \end{array} \right]$$

- **The design requirement for robust residual generation is to maximize the effect of the fault on the residual, i.e.**

$$J_r := \left\{ \inf_w \underline{\sigma}[G_{rf}(w)] \right\}$$

$$y(s) = G_f(s)f(s)$$

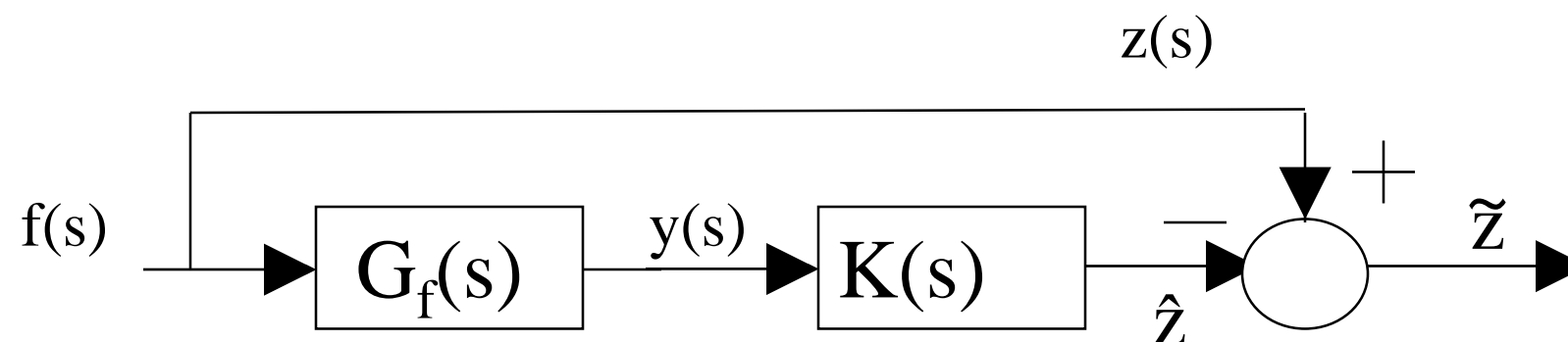
$$r(s) = H_y(s)y(s)$$

H ∞ standard formulation of fault estimation

- The previous maximization problem cannot be easily formulated in an H ∞ setting. To solve this problem, the new following performance index should be introduced

$$J_f := \|G_{rf}(s) - I\|_\infty = \sup_{0 < \|f\|_2 < \infty} \frac{\|r - f\|_2}{\|f\|_2} \quad \longrightarrow \quad r = \hat{f}$$

- where the minimization of the above performance index J can be formulated according to following figure where \hat{z} is an estimation of fault and \tilde{z} is the signal which is used to evaluate the estimation quality



Formulation of fault estimation

The equivalent transfer matrix $P_2(s)$ for the standard H_∞ problem

- The previous system can be reformulated into a standard H_∞ problem as given in following figure

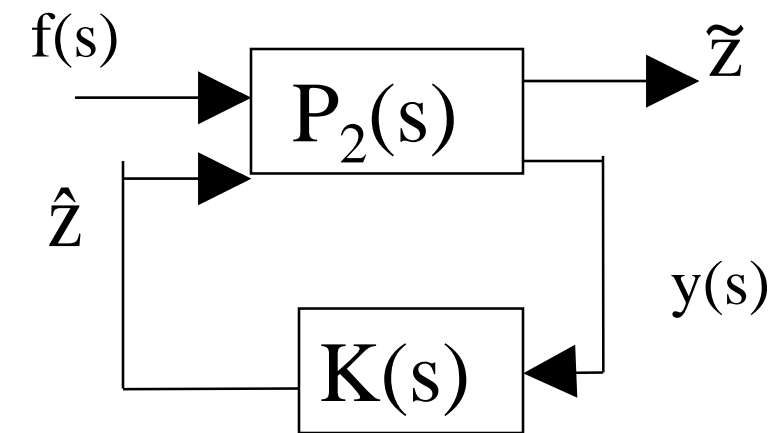
– where the transfer matrix $P_2(s)$ is
$$\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ y \end{bmatrix} = P_2(s) \begin{bmatrix} f \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

» with

$$P_2(s) = \begin{bmatrix} I & -I \\ G_f(s) & 0 \end{bmatrix}$$



$$P_2(s) := \begin{cases} \dot{x} = Ax + R_1 f + 0\hat{z} \\ \tilde{z} = 0x + f - \hat{z} \\ y = Cx + R_2 f + 0\hat{z} \end{cases}$$



Standard problem formulation of fault estimation



Fault estimation via standard H^∞ problem

- The standard H^∞ fault estimation is such that to find a filter $K(s) \in RH^\infty$ such that

$$\|G_{\tilde{z}f}(s)\|_\infty < \gamma$$

– Where $G_{\tilde{z}f}(s) = LFT(P_2(s), K(s)) = I - K(s)G_f(s)$

- The problem can be solved via the standard H^∞ techniques
- In order to decrease the conservatism introduced by the H^∞ techniques, the fault estimation problem can be changed into the filtered version of the fault.

Formulation of filtered fault estimation via standard H_∞ problem

- **Fault estimation problem can be changed into the filtered version of the fault, i.e.,**

$$\bar{f}(s) = T(s)f(s)$$

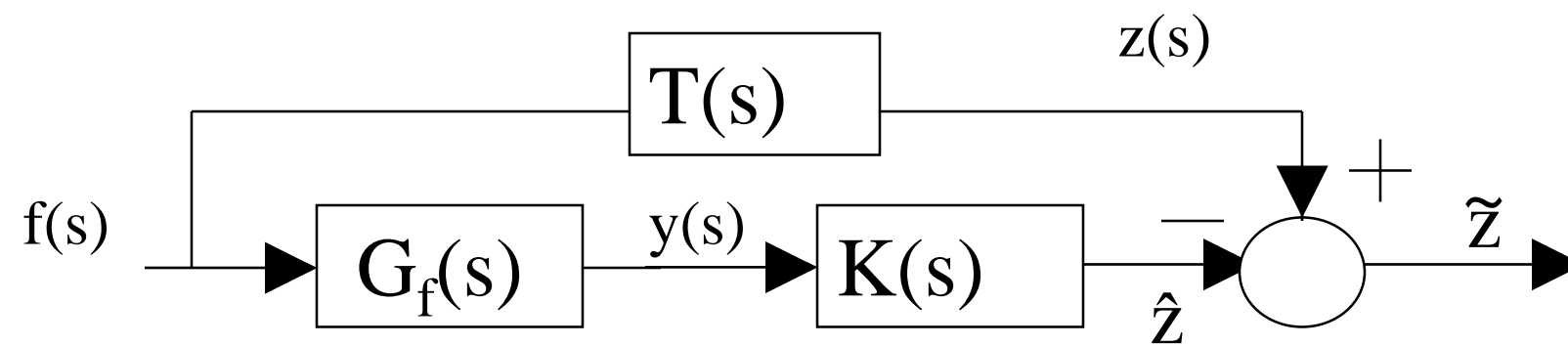
» where $T(s)$ is a RH_∞ transfer matrix which is (for example) equal to a diagonal low pass filter matrix

- **The filtered fault estimation can then be defined as the minimization of the following performance index**

$$J_f := \left\| G_{rf}(s) - T(s) \right\|_\infty = \sup_{0 < \|f\|_2 < \infty} \frac{\|r - \bar{f}\|_2}{\|f\|_2}$$

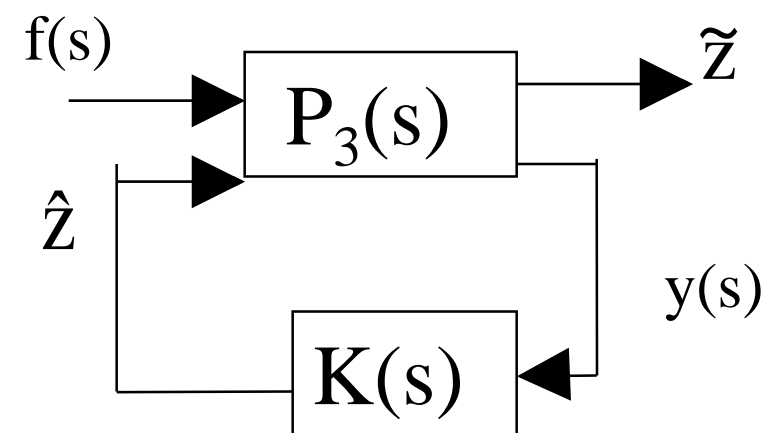
Formulation of filtered fault estimation via standard H_∞ problem

- This optimization problem can be formulated according to following figure where \hat{z} is an estimation of fault and \tilde{z} is the signal which is used to evaluate the estimation quality.



Formulation of filtered fault estimation

- The system illustrated by the above figure can be reformulated into a standard H_∞ problem as given bellow



Formulation of filtered fault estimation via standard H_∞ problem

- If the state space realization of transfer matrix $T(s)$ is

$$T(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_T & B_T \\ \hline C_T & D_T \end{array} \right]$$

- The equivalent transfer matrix $P_3(s)$ for the standard H_∞ problem is given by

$$\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ y \end{bmatrix} = P_3(s) \begin{bmatrix} f \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

» Where

$$P_3(s) = \begin{bmatrix} T(s) & -I \\ G_f(s) & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_T & 0 & B_T & 0 \\ 0 & A & R_1 & 0 \\ \hline C_T & 0 & D_T & -I \\ 0 & C & R_2 & 0 \end{array} \right]$$



Formulation of filtered fault estimation via standard H^∞ problem

- The sensitivity transfer matrix for this standard H^∞ formulation is given by

$$G_{z_f}(s) = LFT(P_3(s), K(s)) = T(s) - G_f(s)K(s)$$

- The estimation of the filtered fault within H^∞ formulation is to find a filter $K(s) \in RH^\infty$ such that

$$\|G_{z_f}(s)\|_\infty < \gamma$$

- The problem can be solved by the standard H^∞ techniques. Note that the problem can also be regarded as a model-matching problem and solved via methods developed in robust control theory.

Fault estimation with disturbance attenuation

- A system with both fault and disturbance terms is modeling by

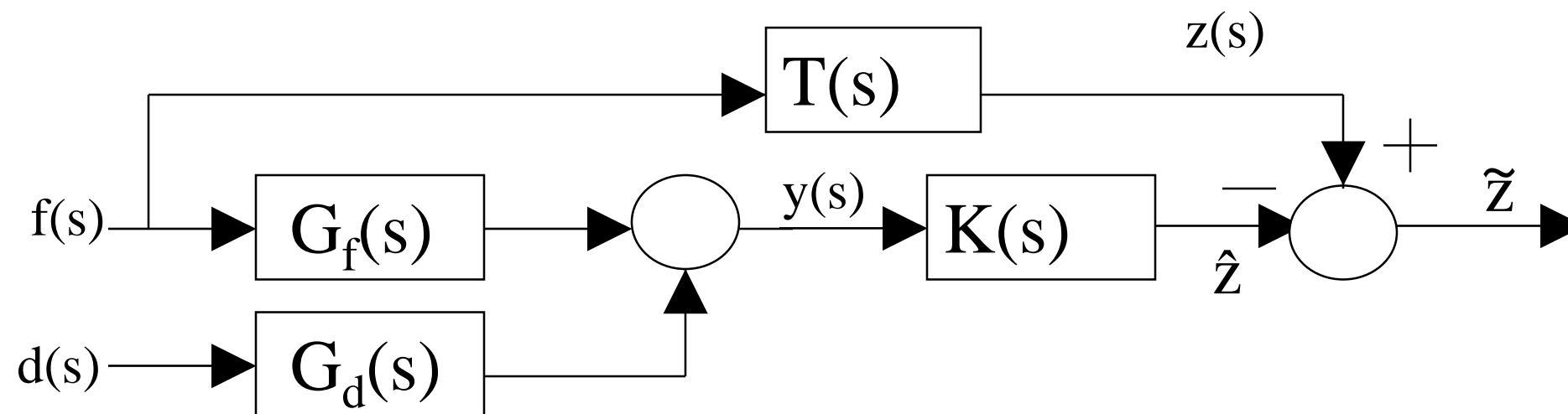
$$\dot{x} = Ax + R_1 f + E_1 d$$

$$y = Cx + R_2 f + E_2 d$$

- Or by the input-output model $y(s) = G_f(s)f(s) + G_d(s)d(s)$

- **Out task is to find an optimal estimation of the filtered fault when the system has both the fault and disturbance.**

- This can be formulated according to the following scheme



Formulation of filtered fault estimation with disturbance estimation

- The objective of the problem is to minimize the following performance index

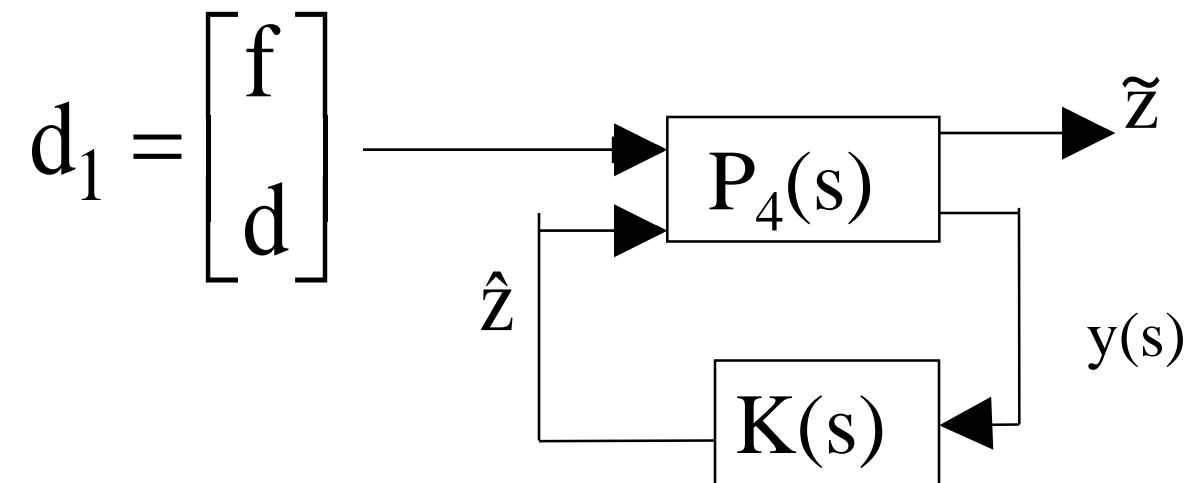
$$J_f := \left\| G_{rd_1}(s) - T(s) \right\|_{\infty} = \sup_{0 < \|d_1\|_2 < \infty} \frac{\|r - f\|_2}{\|d_1\|_2}$$

– where d_1 is the generalized disturbance vector which is defined as

$$d_1 = \begin{bmatrix} f \\ d \end{bmatrix}$$

Reformulation of fault estimation with disturbance attenuation via standard H_∞ problem

- The problem of estimating the fault with disturbance attenuation property can be solved by the standard H_∞ techniques as illustrated in following figure



– where the transfer matrix $P_4(s)$ is defined as

$$\begin{bmatrix} \tilde{z} \\ y \end{bmatrix} = P_4(s) \begin{bmatrix} d_1 \\ \hat{z} \end{bmatrix} \quad \text{with} \quad P_4(s) = \begin{bmatrix} [T(s) \ 0] & -I \\ [G_f(s) \ G_d(s)] & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_T & 0 & B_T & 0 & 0 \\ 0 & A & R_1 & E_1 & 0 \\ C_T & 0 & D_T & 0 & -I \\ 0 & C & R_2 & E_2 & 0 \end{bmatrix}$$



Fault estimation with disturbance attenuation via standard H_∞ problem

- The sensitivity transfer matrix for this standard H_∞ formulation is given by

$$G_{\tilde{z}d_1}(s) = LFT(P_4(s), K(s)) = [T(s) \ 0] - K(s)[G_f(s) \ G_d(s)]$$

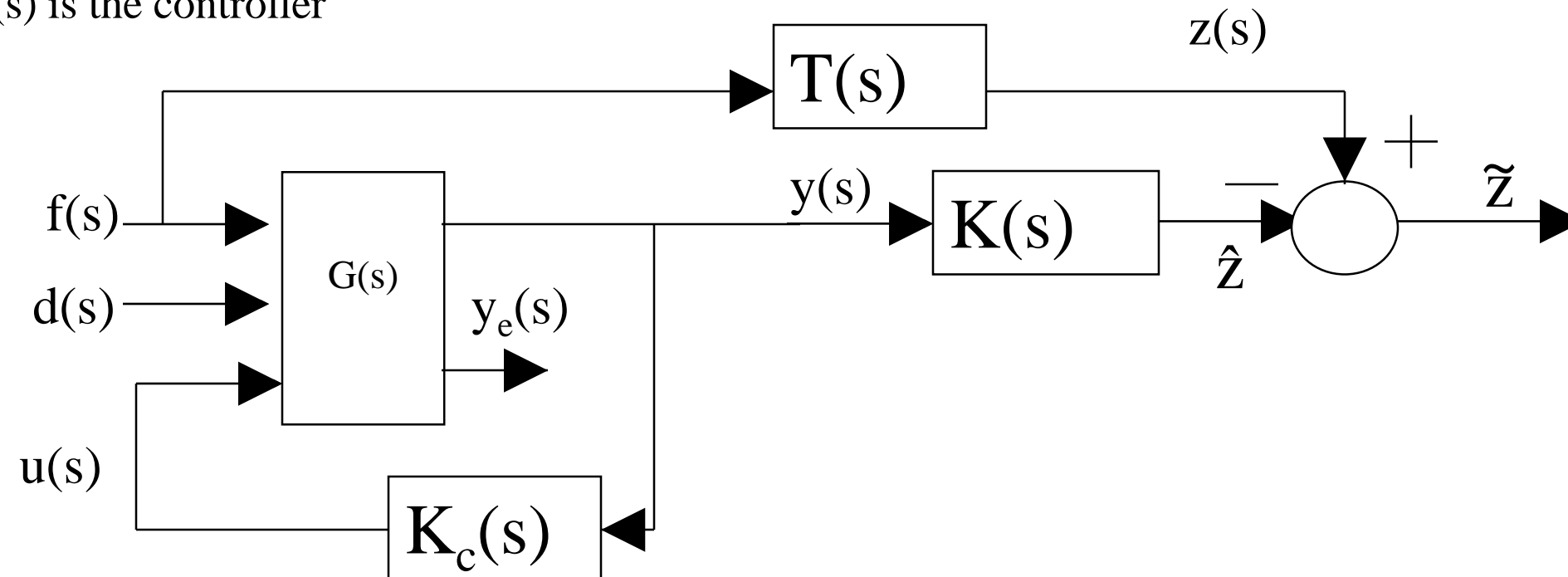
- The estimation of the filtered fault within H_∞ formulation is to find a filter $K(s) \in RH_\infty$ such that

$$\|G_{\tilde{z}d_1}(s)\|_\infty < \gamma$$

- The signal \hat{Z} in fig above can be used as a residual signal as well as an estimate of the filtered fault

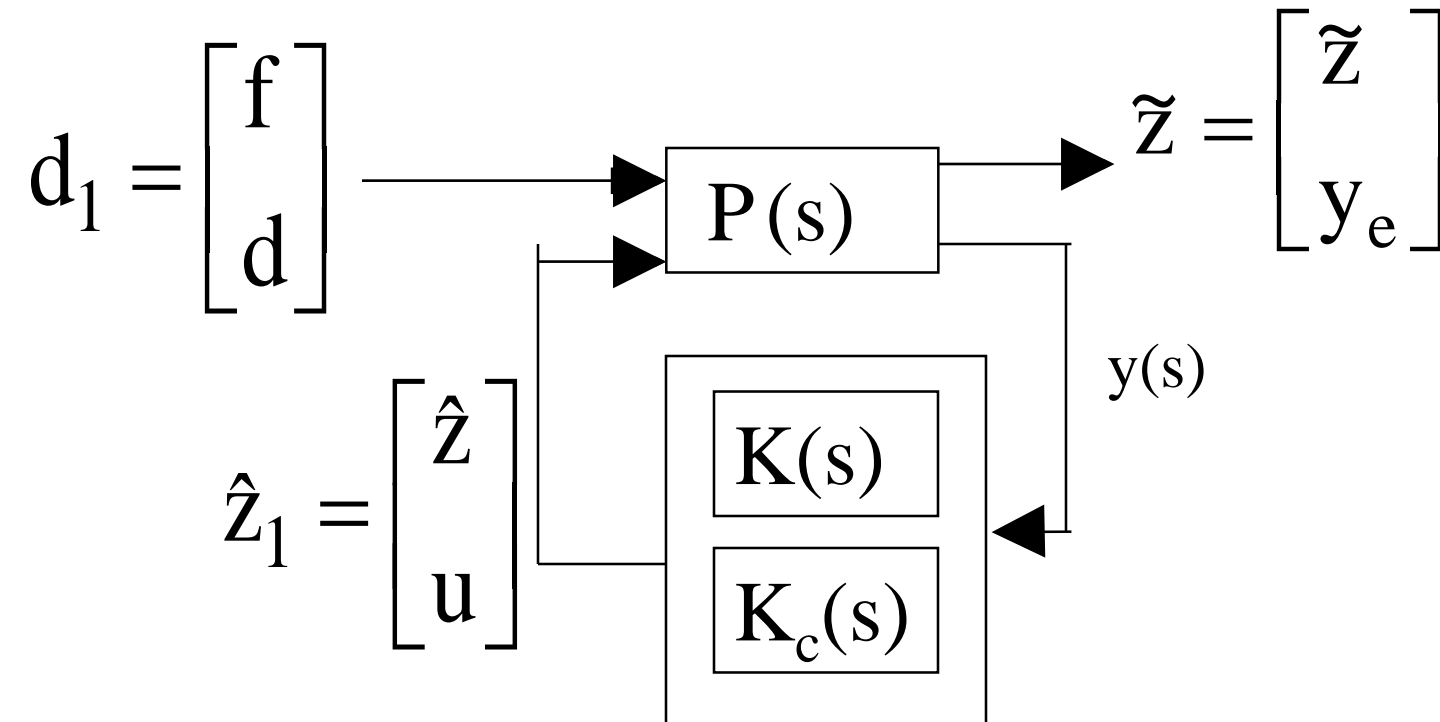
Integrated design, i.e. design controller and fault estimator simultaneously

- The integrated design problem can be formulated according to following figure where
 - y_e is the signal used to evaluate the control performance,
 - $K_o(s)$ is the fault estimator
 - $K_c(s)$ is the controller



Integrated design via standard H_∞ problem

- The integrated design problem depicted in previous figure can be transformed into a standard H_∞ problem as given in following figure



LMI Approach for robust residual generation

- The idea consists of designing a bank of observer where each observer is robust to disturbances and to a set of specified faults.

– Example, consider the LTI systems of the form

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + R_1 f + E_1 d \\ y = Cx \end{cases}$$

» Where $\dim(f)=n_f$ and $\dim(d)=n_d$

– Constructing n_f observers where each observer is insensitive to d and to one component of f

$$\left. \begin{array}{l} \text{obs}_1 \\ \text{obs}_2 \\ \vdots \\ \text{obs}_{n_f} \end{array} \right\} \begin{array}{l} d = \begin{bmatrix} d \\ f_1 \end{bmatrix} \\ d = \begin{bmatrix} d \\ f_2 \end{bmatrix} \\ \vdots \\ d = \begin{bmatrix} d \\ f_{n_f} \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} f = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_{3 \text{ to } n_f} \end{bmatrix} \\ f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_{3 \text{ to } n_f} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ f = f_{1 \text{ to } n_f - 1} \end{array} \quad \begin{array}{l} r_1 = f(f_2, f_{3 \text{ to } n_f}) \\ r_2 = f(f_1, f_{3 \text{ to } n_f}) \\ \vdots \end{array}$$

LMI Approach for robust residual generation

- Assume that the pair (C, A) is detectable and (A, R_1, C) is assumed to have no transmission zeros, i.e. for any $s \in \mathbb{C}$,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & R_1 \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + n_f$$

– Thus detectability of the faults is guaranteed.

- Only the first observer is considered here. Hence consider the fault detection observer 1 of full order as

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + K_1(y - C\hat{x}) \\ r_1 &= y - C\hat{x} \end{aligned}$$

– which is designed for the following system in according to the previous table

$$\dot{x} = Ax + \begin{bmatrix} R_1^2 & \dots & R_1^{n_f} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_{n_f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & R_1^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ f_1 \end{bmatrix}$$



LMI Approach for robust residual generation

- The gain K_1 for observer 1 is designed such that

$$\|G_{r_1 w_1}(s)\|_{\infty} < \gamma$$

– where $w_1 = \begin{bmatrix} d \\ f_1 \end{bmatrix}$

- The solution K_1 of the problem is done by a LMI resolution